Übungsblatt 9 - Lösungshinweise

Aufgabe 1 Bei den Differentialgleichungen handelt es sich um separable DGL 1. Ordnung: $y' = f(x,y) = g(x)h(y)$. $\Rightarrow$ Trennung der Variablen

a) $\boxed{y' = -2xy}$ d.h. $g(x) = -2$, $h(y) = y$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int(-2x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für} \;\; y \neq 0\\ \ln|y| + c &= -x^2 \quad c \in \mathbb{R}\\ |y(x)| &= e^{-x^2-c} = ae^{-x^2} \quad a > 0\\ y(x) &= ae^{-x^2} \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\end{aligned}$$

Zusätzlich ergibt sich die konstante Lösung $y = 0$, welche in obiger Darstellung für $a = 0$ enthalten ist. Die allgemeine Lösung ist also $y(x) = ae^{-x^2}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

b) $\boxed{y' = \dfrac{x}{1+x^2}y}$ d.h. $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $h(y) = y$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{für } y \neq 0\\ \ln|y| + c &= -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) \quad c \in \mathbb{R}\\ |y(x) &= e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-c} = a\sqrt{1+x^2} \quad a > 0\\ y(x) &= a\sqrt{1+x^2} \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\end{aligned}$$

Zusätzlich ergibt sich die konstante Lösung $y = 0$, welche in obiger Darstellung für $a = 0$ enthalten ist. Die allgemeine Lösung ist also $y(x) = a\sqrt{1+x^2}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

c) $\boxed{xy' + (1-x)y^2 = 0}$ d.h. $g(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ (für $x \neq 0$), $h(y) = y^2$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int\left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \quad \text{für } y \neq 0\\ -\frac{1}{y} + c &= x - \ln|x| \quad c \in \mathbb{R}\\ y(x) &= \frac{1}{\ln|x| - +a} \quad a \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Zusätzlich ergibt sich die konstante Lösung $y = 0$, welche in obiger Darstellung nicht enthalten ist.

Aufgabe 2

a) $\boxed{y' = y^2 \sin(x), \quad y(\pi) = 1}$ d.h. Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } y \neq 0 \\ -\frac{1}{y} + c &= -\cos(x) \quad c \in \mathbb{R} \\ y(x) &= \frac{1}{\cos(x) + a} \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Zusätzlich ergibt sich die konstante Lösung $y = 0$, welche in obiger Darstellung nicht enthalten ist.
Das AWP $y(\pi) = 1$ wird für gelöst, falls

$$\left.\frac{1}{\cos(x) + a}\right|_{x=\pi} = \frac{1}{-1+a} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

Die Lösung des AWP lautet also

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x) + 2}$$

b) $\boxed{y' = e^y \cos(x), \quad y(\frac{\pi}{2}) = -2}$ d.h. Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^y}\,\mathrm{d}y &= \int \cos(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R} \\ -e^{-y} + c &= \sin(x) \quad c \in \mathbb{R} \\ y(x) &= -\ln(c - \sin(x)) \end{aligned}$$

Zusätzliche konstante Lösungen gibt es nicht.
Die Lösung des AWP $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ lautet

$$y(x) = -\ln(1 + e^2 - \sin(x))$$

c) $\boxed{y' = (4x + y + 1)^2, \quad y(0) = 1}$
Zur Vereinfachung der DGL ist die Substitution $z(x) := 4x + y(x) + 1$ hilfreich. Es folgt

$$z'(x) = 4 + y'(x) \stackrel{\text{(DGL)}}{=} 4 + z(x)^2$$

$$\Rightarrow z' = 4 + z^2$$

Diese neue DGL lässt sich über Trennung der Variablen lösen:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4+z^2}\,\mathrm{d}z &= \int 1\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } z\in\mathbb{R}\\ \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{z}{2}\right)-\frac{c}{2} &= x \quad c\in\mathbb{R}\\ z(x) &= 2\tan(2x+c)\end{aligned}$$

Zusätzliche konstante Lösungen für $z(x)$ gibt es nicht.
Führt man die Rück-Substitution aus, so erhält man für die gesuchte Funktion y:

$$y(x)=z(x)-4x-1=2\tan(2x+c)-4x-1 \quad (\text{mit } c\in\mathbb{R})$$

Die Lösung des AWP $y(0)=1$ lautet:

$$y(x)=2\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-4x-1$$

d) $\boxed{y'=\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}, \quad y(1)=2}$ (für $x\neq 0$)

Zur Vereinfachung der DGL ist die Substitution $z(x):=\frac{x}{y}(x)$ hilfreich. Es folgt

$$z'(x)=\frac{y'(x)x-y(x)}{x^2}=\frac{1}{x}\left(y'(x)-\frac{y(x)}{x}\right)\overset{(\mathrm{DGL})}{=}\frac{1}{x}e^{z(x)}$$

$$\Rightarrow z'=\frac{1}{x}e^z$$

Diese neue DGL lässt sich über Trennung der Variablen lösen:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^z}\,\mathrm{d}z &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } z\in\mathbb{R}\\ -e^{-z} &= \ln|x| \quad c\in\mathbb{R}\\ z(x) &= -\ln(c-\ln|x|)\end{aligned}$$

Zusätzliche konstante Lösungen für $z(x)$ gibt es nicht.
Führt man die Rück-Substitution aus, so erhält man für die gesuchte Funktion y:

$$y(x)=xz(x)=-x\ln(c-\ln|x|) \quad (\text{mit } c\in\mathbb{R})$$

Die Lösung des AWP $y(1)=2$ lautet:

$$y(x)=-x\ln\left(\frac{1}{e^2}-\ln|x|\right)$$

Aufgabe 3 Es handelt sich um lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung[1]:

$$y' + a(x)y = b(x) \quad \Rightarrow \quad \text{Satz 5.3}: \ A(x), \, C(x)$$

a) $\boxed{y' + \dfrac{x}{x^2+3}y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}$ d.h. $a(x) = \frac{x}{x^2+3}$, $b(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

$$\Rightarrow A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+3)$$

Ferner ist für eine spezielle Lösung eine Stammfunktion zu finden zu $b(x)e^{A(x)}$:

$$C(x) = \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$$

Damit folgt gemäß Satz 5.4:

$$y(x) = (C(x) + C)e^{-A(x)} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+3}} + \frac{C}{\sqrt{x^2+3}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) $\boxed{y' + \dfrac{4x}{x^2+1}y = \dfrac{1}{x^2}}$ $(x \neq 0)$ d.h. $a(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, $b(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln(x^2+1) = \ln(x^4 + 2x^2 + 1)$$

Ferner ist für eine spezielle Lösung eine Stammfunktion zu finden zu $b(x)e^{A(x)}$:

$$C(x) = \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$$

Damit folgt gemäß Satz 5.4:

$$y(x) = (C(x) + C)e^{-A(x)} = \frac{\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C}{x^4 + 2x^2 + 1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

[1] In der Literatur wird das dafür genutzte Lösungsverfahren als „Variation der Konstanten“ bezeichnet.

Aufgabe 4 Gegeben ist die nicht-lineare DGL 1. Ordnung für $v(t)$:

$$m\dot{v} = mg - \lambda v^2$$

mit Masse $m > 0$, der Erdbeschleunigung $g = 9,81$ sowie einer Reibungskonstante $\lambda > 0$.

a) Es handelt sich um eine separable DGL, daher Lösung über Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g - \frac{\lambda}{m}v^2 \\ \int \frac{1}{g - \frac{\lambda}{m}v^2}\,\mathrm{d}v &= \int 1\,\mathrm{d}t \quad (\text{für } g - \tfrac{\lambda}{m}v^2 \neq 0) \\ \frac{1}{g}\int \frac{\mathrm{d}v}{1 - \frac{\lambda}{mg}v^2} &= t - c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Es ist

$$\int \frac{1}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{artanh}(x)$$

also erhält man mit der Substitution $x := \sqrt{\frac{\lambda}{mg}}v$:

$$\frac{1}{g}\int \frac{\mathrm{d}v}{1 - \frac{\lambda}{mg}v^2} = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{mg}{\lambda}}\operatorname{artanh}\left(\sqrt{\tfrac{\lambda}{mg}}v\right) \stackrel{!}{=} t + c$$

Löst man nach der gesuchten Geschwindigkeit v auf, so erhält man:

$$v(t) = \sqrt{\tfrac{mg}{\lambda}}\tanh\left(\sqrt{\tfrac{\lambda g}{m}}t + a\right), \quad a \in \mathbb{R}$$

Zusätzlich gibt es die konstante Lösung, die aus $g - \frac{\lambda}{m}v^2 = 0$ folgt:

$$v(t) = \sqrt{\tfrac{mg}{\lambda}} = \text{const.} \quad (\text{nur } v \geq 0 \text{ ist physikalisch sinnvoll})$$

b) Es gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\tanh(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \stackrel{\text{L'H}}{=} 1$$

Damit folgt für die Grenzgeschwindigkeit $v_{\max}$, die nicht überschritten werden kann:

$$v(t) \leq v_{\max} = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}} = 7,0\,\mathrm{m/s}$$

Da $v(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ gilt, führt eine Vervierfachung $\lambda \mapsto 4\lambda$ auf $v_{\max} \mapsto \frac{1}{\sqrt{4}}v_{\max} = 3,5\,\mathrm{m/s}$, d.h. die maximale Geschwindigkeit würde sich halbieren.

Aufgabe 5 $\boxed{\dot{T} = \alpha(T - T_U), \quad T(0) = T_0 = 21°\text{C}}$ mit Abkühlrate $\alpha = -0,01/\text{h}$ und Umgebungstemperatur $T_U = 12°\text{C}$ ist ein separables AWP, das mit Trennung der Variablen gelöst werden kann.

Der Körper mit Anfangstemperatur $T_0 = 21°\text{C}$ kühlt aufgrund der niedrigeren Umgebungstemperatur $T_U = 12°\text{C}$ auf $T_1 = 18°\text{C}$ ab, daher gilt: $T_0 > T(t) > T_U$. Es folgt:

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{T - T_U} = \int \alpha \,\mathrm{d}t \quad \text{denn } T - T_U > 0$$

Nach Lösen der beiden Integrale und Auflösen er ergibt sich für die zeitabhängige Temperatur $T(t) = T_U + ce^{\alpha t}$ für ein $c > 0$.

Das AWP $T(0) = T_U + c \stackrel{!}{=} T_0$ wird für $c_0 = T_0 - T_U = 9°\text{C}$ gelöst:

$$T(t) = T_U + c_0 e^{-\alpha t}$$

Es bezeichne $\tau > 0$ den Zeitpunkt, an dem der Körper auf $T_1 = 18°\text{C}$ abgekühlt ist:

$$T(\tau) = T_U + c_0 e^{\alpha\tau} \stackrel{!}{=} T_1$$

Löst man nach τ auf, so ergibt sich:

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{T_1 - T_U}{T_0 - T_U}\right) = 40,5\text{h}$$

Aufgabe 6 Im Folgenden handelt es sich um lineare DGLs zweiter bzw. dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die homogene Lösung ist durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ bestimmt. Der Ansatz für die spezielle Lösung ist die Struktur der entsprechenden Inhomogenität $b(x)$ (Störterm) zu betrachten.

a) $\boxed{y'' + y' - y = 2x + 1 + e^x}$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 1 \stackrel{!}{=} 0$ besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, also ergibt sich für die homogene Lösung:

$$\Rightarrow y_h(x) = C_1 e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)x} + C_2 e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)x} \quad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Der Ansatz für die spezielle Lösung folgt der Struktur des Störmterms sowie den Nullstellen von $p(\lambda)$:

$$b(x) = \underbrace{2x + 1}_{\text{Polynom 1. Ordnung}} + \underbrace{e^{1\cdot x}}_{\text{Exp-Funktion}}$$

Da $k = 1 \neq \lambda_{1,2}$ gilt, wird mit den drei zu bestimmenden Koeffizienten $A_0, A_1, B \in \mathbb{R}$ wie folgt angesetzt:

$$y_s(x) = A_0 + A_1 x + Be^x$$

Die erste sowie zweite Ableitung des Ansatzes, $y_s'(x) = A_1 + Be^x$, $y_s''(x) = Be^x$ ergeben eingesetzt in die DGL drei Bedingungen:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} \quad A_1 - A_0 = 1 \quad \Rightarrow A_0 = -3 \\ &\text{(II)} \quad -A_1 = 2 \\ &\text{(III)} \quad B = 1 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich für die allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} - 3 - 2x + e^x$$

b) $\boxed{y'' + y' + \frac{5}{4}y = \cos(x)}$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - \frac{5}{4} \stackrel{!}{=} 0$ besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i$, also ergibt sich für die homogene Lösung:

$$\Rightarrow y_h(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos(x) + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin(x) \quad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Der Ansatz für die spezielle Lösung folgt der Struktur des Störmterms sowie den Nullstellen von $p(\lambda)$:

$$b(x) = \cos(x)$$

Da $\omega = 1 \neq \lambda_{1,2}$ gilt, wird mit den zwei zu bestimmenden Koeffizienten $A, B \in \mathbb{R}$ wie folgt angesetzt:

$$y_s(x) = A\cos(x) + b\sin(x)$$

Die erste sowie zweite Ableitung des Ansatzes ergeben eingesetzt in die DGL zwei Bedingungen:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} \quad \frac{1}{4}A + B = 1 \\ &\text{(II)} \quad -A + \frac{1}{4}B = 0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystem in zwei Variablen ergibt: $A = \frac{4}{17}$ und $B = \frac{16}{17}$. Insgesamt ergibt sich für die allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x) = \left(C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{4}{17}\right)\cos(x) + \left(C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{16}{17}\right)\sin(x)$$

c) $\boxed{y''' + y'' - 56y' = 28}$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 56\lambda \stackrel{!}{=} 0$ besitzt die Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = -8$, also ergibt sich für die homogene Lösung:

$$\Rightarrow y_h(x) = C_1 + C_2 e^{7x} + C_3 e^{-8x} \quad \text{mit } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Da der Störterm eine Konstante ist, $b(x) = 28$ (also ein Polynom nullten Grades), ist grundsätzlich ein $A \in \mathbb{R}$ anzusetzen. Ferner ist $0 = \lambda_1$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, d.h. es ergibt sich folgender Ansatz:

$$y_s(x) = x \cdot A$$

Eingesetzt in die DGL ergibt sich $A = -\frac{1}{2}$. Insgesamt ergibt sich für die allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x) = C_1 + C_2 e^{7x} + C_3 e^{-8x} - \frac{1}{2}x$$

Aufgabe 7 Anschließend zum analogen Vorgehen wie in Aufgabe 6 sind bei den nachstehenden AWP die Integrationskonstanten zu bestimmen.

a) $\boxed{y'' + 2y' + y = -e^{-x}, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0}$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \stackrel{!}{=} 0$ besitzt eine doppelte Nullstelle $\lambda = -1$, also ergibt sich für die homogene Lösung:

$$\Rightarrow y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \quad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Der Ansatz für die spezielle Lösung folgt der Struktur des Störmterms sowie den Nullstellen von $p(\lambda)$:

$$b(x) = -e^{-1 \cdot x}$$

Da $k = -1 = \lambda$ eine doppelte Nullstelle ist, wird mit $A \in \mathbb{R}$ wie folgt angesetzt:

$$y_s(x) = x^2 \cdot Ae^{-x}$$

Die erste sowie zweite Ableitung des Ansatzes,

$$y_s'(x) = 2xAe^{-x} - x^2 Ae{-}x$$
$$y_s''(x) = 2Ae^{-x} - 4xAe^{-x} + x^2 Ae^{-x}$$

lassen nach Einsetzten in die DGL auf $A = -\frac{1}{2}$ schließen. Insgesamt ergibt sich für die allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x) = \left(C_1 + C_2 x - \tfrac{1}{2}x^2\right) e^{-x}$$

Das AWP $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ wird gelöst durch ($C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = 1 + e$):

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}\left(1 + x^2\right) e^{-x} + (1 + e)xe^{-x}$$

b) $\boxed{y''' - 7y'' - 18y' = 0, \quad y(0) = -29, y'(0) = 49, y''(0) = 1}$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 7\lambda - 18) \stackrel{!}{=} 0$ besitzt die Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 9$, also ergibt sich für die (homogene) Lösung:

$$\Rightarrow y(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{9x} \quad \text{mit } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Da $b(x) = 0$ gilt, ist keine spezielle Lösung zu berechnen. Es ist also $y(x) = y_h(x) + 0$.
Das AWP $y(0) = -29$, $y'(0) = 49$ und $y''(0) = 1$ mit

$$y'(x) = -2C_2 e^{-2x} + 9C_3 e^{9x}$$
$$y''(x) = 4C_2 e^{-2x} + 81C_3 e^{9x}$$

führt auf ein lineares Gleichungssystem für C_1, C_2, C_3. Zum Beispiel mit Gauß lässt sich auf $C_1 = -10$, $C_2 = -20$, $C_3 = 1$ schließen, sodass das AWP gelöst wird durch:

$$y(x) = -10 - 20^{-2x} + e^{9x}$$