

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der nachstehenden Differentialgleichungen. Um welche Art von Differentialgleichung handelt es sich?

a) $y' = -2xy$,

b) $y' = \frac{xy}{1+x^2}$,

c) $xy' + (1-x)y^2 = 0 \quad (x \neq 0)$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung der DGL. Lösen Sie anschließend das AWP, indem Sie die Konstanten der allgemeinen Lösung bestimmen.

a) $y' = y^2 \sin(x)$, mit Anfangswert $y(\pi) = 1$

b) $y' = e^y \cdot \cos(x)$, mit Anfangswert $y(\frac{\pi}{2}) = -2$

c) $y' = (4x + y + 1)^2$, mit Anfangswert $y(0) = 1$

Hinweis: Schreiben Sie die Differentialgleichung für ein geeignetes $z(x)$ um in $z' = 4 + z^2$ und schließen Sie aus der Lösung $z(x)$ auf die allgemeine Lösung $y(x)$.

d) $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$ ($x \neq 0$), mit Anfangswert $y(1) = 2$

Hinweis: Schreiben Sie die Differentialgleichung für ein geeignetes $z(x)$ um in $z' = \frac{1}{x}e^z$ und schließen Sie aus der Lösung $z(x)$ auf die allgemeine Lösung $y(x)$.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der nachstehenden Differentialgleichungen. Um welche Art von Differentialgleichung handelt es sich?

a) $y' + \frac{xy}{x^2+3} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

b) $y' + \frac{4xy}{x^2+1} = \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$)

Aufgabe 4 Freier Fall mit Luftwiderstand: Für die Sinkgeschwindigkeit $v(t)$ eines Körpers der Masse $m > 0$ unter Berücksichtigung der Luftreibung erhält man die DGL

$$m\dot{v} = mg - \lambda v^2,$$

wobei $g = 9,81$ die Erdbeschleunigung und $\lambda > 0$ die Reibungskonstante bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

b) Untersuchen Sie das Verhalten der allgemeinen Lösung $v(t)$ im Grenzwert $t \rightarrow \infty$.

Welchen Wert kann die Geschwindigkeit nicht überschreiten, wenn $m = 50$ kg und die Reibung $\lambda = 10$ kg/m beträgt? Wie würde sich Ihre Antwort bei einer Vervierfachung der Reibung ändern?

Aufgabe 5 Ein Körper der Temperatur 21°C wird in einem Raum mit Umgebungstemperatur $T_U = 12^\circ\text{C}$ gelegt. Die Temperatur $T(t)$ des Körpers verhalte sich gemäß der DGL

$$\dot{T} = \alpha \cdot (T - T_U)$$

mit Abkühlrate $\alpha = -0,01/\text{h}$. Wann hat sich der Körper auf 18°C abgekühlt?

Aufgabe 6 Geben Sie die allgemeine Lösung für folgende linearen DGL an:

a) $y'' + y' - y = 2x + 1 + e^x$

b) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = \cos(x)$

c) $y''' + y'' - 56y' = 28$

Aufgabe 7 Ermitteln Sie die Lösung der beiden nachstehenden Anfangswertprobleme:

a) $y'' + 2y' + y = -e^{-x}$, mit $y(1) = 1, y'(1) = 0$

Hinweis: Beachten Sie die doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms im Ansatz für die spezielle Lösung $y_s(x)$.

b) $y''' - 7y'' - 18y' = 0$, mit $y(0) = -29, y'(0) = 49, y''(0) = 1$

Hinweis: Der Störterm dieser DGL 3. Ordnung verschwindet, weshalb nur die homogene Lösung zu betrachten ist. Sie werden überrascht sein, wie schnell sich das AWP mit den Werkzeugen aus MA1 lösen lässt.