Übungsblatt 8 - Lösungshinweise

Aufgabe 1 Der durch die Ebene $z = x$ begrenzte Zylinder ist beschrieben durch

$$\begin{aligned} Z &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, x \geq z \geq 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq z \leq x\} \end{aligned}$$

Das Integral eines Skalarfelds $f : Z \to \mathbb{R}$ über Z lautet in kartesischen Koordinaten:

$$I = \iiint_Z f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^x f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

In Zylinderkoordinaten gilt:

$$Z = \{(r, \varphi, z) \mid r \in [0, a], \varphi \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], z \in [0, r\cos(\varphi)]\}$$

Damit folgt für die Darstellung des Integrals:

$$I = \int_0^a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r\cos(\varphi)} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)\, r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

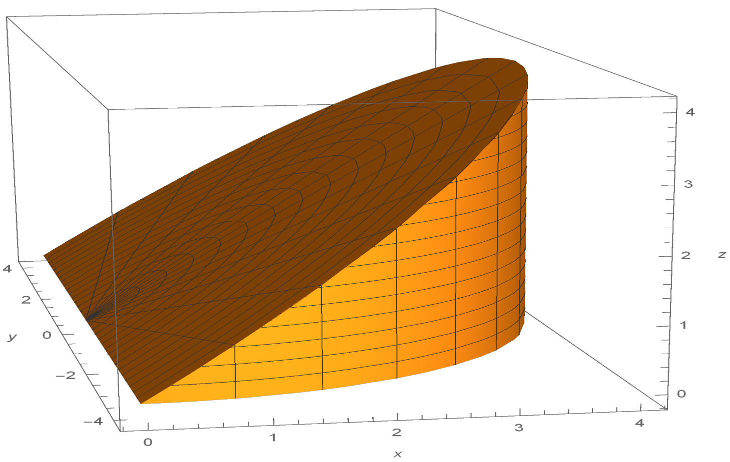
Das Intervall $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ergibt[1] sich aus der Bedingung $x \geq 0$.

Das Volumen von Z lässt sich durch Auswertung der beiden Integrale für $f \equiv 1$ (d.h. $f(x, y, z) = 1$ für alle $(x, y, z) \in Z$) berechnen:
Kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^x 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a 2x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r\cos(\varphi)} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= [\sin(\varphi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_0^a = \tfrac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$



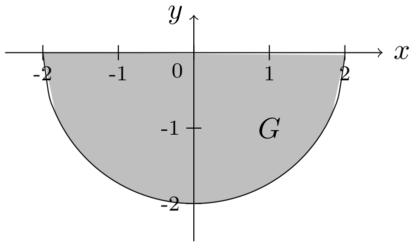
Skizze von Z (für $a = 4$)

[1] Eigentlich ist $\varphi \in [0, 2\pi) \setminus (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, was sich äquivalent durch $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ darstellen lässt. Skizze!

Aufgabe 2 Es ist $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x, y, z \le 2\} = [0, 2]^3$ ein Würfel mit Kantenlänge 2 sowie die Dichte $\rho : W \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\rho(x, y, z) = x + y + z$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
m &= \iiint\limits_W \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \int_0^2 \underbrace{\left[\tfrac{1}{2}x^2 + x(y+z)\right]_0^2}_{=\,2(1+y+z)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= 2\int_0^2 \underbrace{\left[\tfrac{1}{2}y + y(1+z)\right]_0^2}_{=\,2(2+z)} \mathrm{d}z \\
&= 4\left[2z + \tfrac{1}{2}z^2\right]_0^2 = 24
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Die Halbkreisfläche G lässt sich mit Polarkoodinaten darstellen:



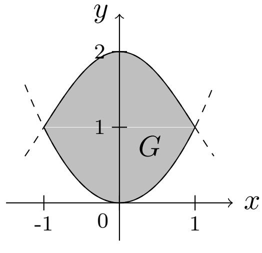
$$\begin{aligned}
G &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 4, y < 0\} \\
G_P &= \{(r, \varphi) \,|\, 0 \le r \le 2, \varphi \in (\pi, 2\pi)\}
\end{aligned}$$

mit Dichte $\rho : G \to \mathbb{R}_0^+$, $\rho(x, y) = 15 - x^2 - y^2 - 4y$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
m &= \iint\limits_G \rho(x,y)\,\mathrm{d}A \\
&= \int_\pi^{2\pi} \int_0^2 \underbrace{\big(15 - r^2 - 4r\sin(\varphi)\big)\; r}_{=\,15r - r^3 - 4r^2\sin(\varphi)} \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_\pi^{2\pi} \left(26 - \frac{32}{3}\sin(\varphi)\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{64}{3} + 26\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Die Fläche G, die von $y = x^2$ sowie $y = 1 + \cos(\frac{\pi}{2}x)$ begrenzt wird, lässt sich als kartesischen Normalbereich bzgl. der x-Achse darstellen:



$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \le x \le 1, y \ge x^2\}$$

mit homogener Dichte $\rho \equiv 3$.

Damit folgt: $m = 3A$, wobei A die Fläche von G bezeichnet.

Damit folgt für die Masse von G:

$$\begin{aligned} m &= \iint\limits_G \rho(x,y)\,\mathrm{d}A = 3\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1+\cos(\frac{\pi}{2}x)} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= 3\int_{-1}^{1}\left(1+\cos(\tfrac{\pi}{2}x)-x^2\right)\mathrm{d}x = 4+\frac{12}{\pi} \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie von G ist für die x-Komponente des Schwerpunkts $x_S = 0$ zu erwarten. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{A}\iint\limits_G x\,\mathrm{d}A = \frac{3}{m}\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1+\cos(\frac{\pi}{2}x)} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{m}\int_{-1}^{1}\left(x+x\cos(\tfrac{\pi}{2}x)-x^2\right)\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

Die Null ergibt sich, da bzgl. x eine ungerade Funktion über ein zur Null symmetrisches Intervall integriert wird.
Für die y-Komponente des Schwerpunkts ergibt sich:

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{A}\iint\limits_G y\,\mathrm{d}A = \frac{3}{m}\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1+\cos(\frac{\pi}{2}x)} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{m}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(1+2\cos(\tfrac{\pi}{2}x)+\cos^2(\tfrac{\pi}{2}x)-x^4\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{m}\left(\frac{13}{10}+\frac{4}{\pi}\right) = \frac{3}{40}\left(13+\frac{1}{3+\pi}\right) \approx 0,987 \end{aligned}$$

Für die Integration bzgl. x ist die bekannte Stammfunktion zu $\cos^2(ax)$ zu verwenden[2]:

$$\int \cos^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}+\frac{1}{2a}\sin(ax)\cos(ax)+c$$

Aufgabe 5 Für eine gegebene Koordinatentransformation ergibt sich die Jacobi-Matrix zu

$$J := \frac{\partial(\text{alte Welt})}{\partial(\text{neue Welt})}$$

a) Zylinderkoordinaten (r,φ)

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned} \qquad \Rightarrow J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man erhält (z.B. mit Entwicklung nach der dritten Spalte oder der Regel von Sarrus):

$$|J| = \det J = r\cos^2(\varphi) - (-r\sin^2(\varphi)) = r$$

[2] Phönix-Integral oder per Substitution aus $\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ zu finden

b) Kugelkoordinaten (r, θ, φ)

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ y &= r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned} \qquad \Rightarrow J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ r\cos(\varphi)\cos(\theta) & r\sin(\varphi)\cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ -r\sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} |J| = \det J &= 0 + r^2\sin^2(\varphi)\sin^3(\theta) + r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\cos^2(\varphi) \\ &\quad - \left[-r^2\sin^2(\varphi)\sin(\theta)\cos^2(\theta) - r^2\cos^2(\varphi)\sin^3(\theta)\right] \\ &= r^2\left[\sin^3(\theta) + \cos^2(\theta)\sin(\theta)\right] \\ &= r^2\sin(\theta) \end{aligned}$$

Aufgabe 6 Der Kreiskegel $z^2 \leq \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ für $0 \leq z \leq h$ besitzt die Dichte $\rho(z) = 5z$. In Zylinderkoordinaten gilt:

$$K = \{(r,\varphi,z) \,|\, 0 \leq r \leq \psi(z), \varphi \in [0, 2\pi), 0 \leq z \leq h\}$$

mit der oberen Grenze für r aus

$$z^2 = \frac{h^2}{R^2} \cdot r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{zR}{h} = \psi(z)$$

Damit folgt:

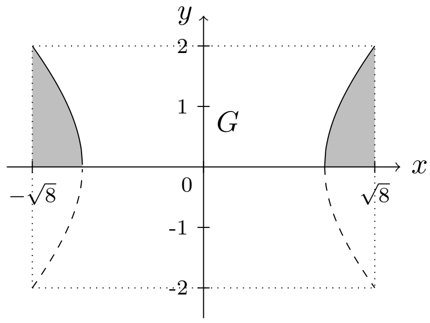
$$\begin{aligned} m &= \iiint\limits_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{zR}{h}} 5z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^h 5z \cdot \frac{1}{2}\frac{z^2R^2}{h^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{5\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^3\,\mathrm{d}z = \frac{5\pi}{4}R^2h^2 \end{aligned}$$

Aufgrund er Symmetrie des Kreiskegels gilt: $x_S = 0$ und $y_S = 0$. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{m}\iiint\limits_K z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{m}\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{zR}{h}} 5z^2r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{m} \cdot \pi R^2h^3 = \frac{4}{5}h \end{aligned}$$

Aufgabe 7 Der Satz für Volumina von Rotationskörpern um die y-Achse ist anzuwenden für $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \in [0, 2]$ mit $x \in [2, \sqrt{8}]$.

Das <u>halbe Volumen</u> des Rotationskörpers ergibt sich, indem aus der umgebenden Box (Zylinder mit Höhe 2 und Grundfläche $r_0^2\pi = 8\pi$, also $V_{\text{Box}} = 16\pi$) das sich aus dem Satz für Volumina von Rotationskörpern um die y-Achse ergebende Volumen herausgeschnitten wird:



$$\begin{aligned}\frac{1}{2}V &= V_{\text{Box}} - 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 16\pi - 2\pi \int_2^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x = \frac{32\pi}{3}\end{aligned}$$

Daraus folgt für das Volumen: $V = \dfrac{64\pi}{3}$

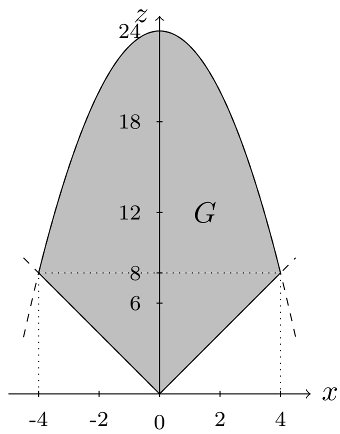
Aufgabe 8 Paraboloid: $z = 24 - x^2 - y^2$, Kreiskegel: $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

a) Die Schnittpunkte des oberen sowie unteren Teilkörpers sind:

$$\begin{aligned} 24 - x^2 - y^2 &\stackrel{!}{=} 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow -r^2 - 2r + 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= 4 > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Abstand $r = 4$ von der z-Achse wird in der Höhe $h = 2r = 8$ (bzw. $h = 24 - r^2 = 8$) erreicht.

$\Rightarrow$ Der maximale Durchmesser ist $d = 2r = 8$.



b) Es gilt $V = V_1 - V_2$ mit den Summanden aus dem Satz für die Volumina von Rotationskörpern um die Achse der abhängigen Variable (in diesem Fall z) und $f_1(x) = 24 - x^2$ sowie $f_2(x) = 2x$. Die Differenz erklärt sich dadurch, dass mit der nachstehend genutzten Identität für $V_{1,2}$ das Volumen <u>unterhalb</u> der Rotationsfläche berechnet wird. Es gilt:

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\pi \int_0^4 x f_1(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^4 x(24 - x^2)\,\mathrm{d}x = 256\pi \\ V_2 &= 2\pi \int_0^4 x f_2(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^4 x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{256\pi}{3} \end{aligned}$$

Insgesamt also ergibt sich für das Volumen des gesamten Rotationskörpers:

$$V = 256\pi - \frac{256\pi}{3} = \frac{512\pi}{3}$$