# Übungsblatt 8

**Aufgabe 1** Gegeben sei ein Zylinder $Z \subset \mathbb{R}^3$ mit $x^2+y^2 \leq a^2$, der für $x \geq 0, z \geq 0$ unterhalb der Ebene $z = x$ liegt. Stellen Sie das Dreifachintegral eines dreidimensionalen Skalarfeldes über $Z$ mithilfe von kartesischen Koordinaten sowie mithilfe von Zylinderkoordinaten dar.

Nutzen Sie anschließend eine der beiden Darstellungen, um das Volumen von $Z$ zu berechnen.

**Aufgabe 2** Berechnen Sie die Masse des mit der Dichte $\rho(x, y, z) = x + y + z$ belegten Würfels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x, y, z \leq 2\}$.

**Aufgabe 3** Die untere (d.h. unterhalb der $x$-Achse gelegene) Halbkreisfläche mit Radius 2 um den Koordinatenursprung sei mit Masse der Dichte $\rho(x, y) = 15 - x^2 - y^2 - 4y$ belegt. Ermitteln Sie die Masse dieser Fläche.

**Aufgabe 4** Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt der gleichmäßig mit Masse der Dichte 3 belegten Fläche $G$, die für $-1 \leq x \leq 1$ von $y = x^2$ und $y = 1 + \cos(\frac{\pi}{2}x)$ begrenzt wird. Fertigen Sie auch eine Skizze von $G$ an.

**Aufgabe 5** Zeigen Sie, dass für die Jacobi-Determinante $|J|$ von Zylinderkoordinaten bzw. Kugelkoordinaten gilt: $|J_{\text{Zylinderkoordinaten}}| = r$ und $|J_{\text{Kugelkoordinaten}}| = r^2 \sin(\theta)$.

**Aufgabe 6** Ein Kreiskegel mit Gleichgung $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq h$, sei mit einem Material gefüllt, dessen Dichte $\rho$ linear mit der Höhe ansteigt, $\rho(z) = 5z$. Berechnen Sie die Masse $m$ des Kegels und die Koordinaten $x_S, y_S$ und $z_S$ seines Schwerpunkts.

**Aufgabe 7** Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, dessen äußerer Rand durch Rotation des Kurvenstücks $x^2 - y^2 = 4$ für $-2 \leq y \leq 2$ um die $y$-Achse entsteht.

**Aufgabe 8** Ein Rotationskörper (rotationssymmetrisch zur $z$-Achse) wird vom Paraboloid mit der Gleichung $z = 24 - x^2 - y^2$ und vom Kegel mit der Gleichung $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ begrenzt.

a) In welcher Höhe (d.h. für welchen Wert von $z$) hat der Körper seinen maximalen Durchmesser? Wie groß ist dieser maximale Durchmesser?

b) Stellen Sie den Körper durch eine 3D-Skizze oder durch die Skizze eines Schnitts für $y = 0$ dar. Berechnen Sie das Volumen des Körpers.