Übungsblatt 7 - Lösungshinweise

Aufgabe 1 Zu berechnen ist das Doppelintegral über R sowie das Dreifachintegral über W_3:

a) Es ist $R = [-1, 2] \times [-\pi, \pi]$ über das zu integrierende Rechteck und $f(x, y) = x\sin(y)$.

$$\iint\limits_R x\sin(y)\,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{2}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0$$

Das Integral über y wird über die 2π-periodische Funktion $x\sin(y)$ ausgeführt, weshalb eine Integration von $-\pi$ bis π (Länge 2π) Null ergibt.

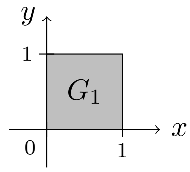
b) Es ist $W = [0, 1]^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ der dreidimensionale Einheitswürfel und $f(x, y, z) = ze^{x+y}$.

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{W_3} ze^{x+y}\,\mathrm{d}V &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 ze^{x+y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1\int_0^1 \tfrac{1}{2}e^{x+y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}\left(e^{x+1} - e^x\right)\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}e^2 - e + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(e-1)^2\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Es ist das Doppelintegral von $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ über verschiedene Gebiete zu betrachten:

a) Für das Gebiet G_1 eignet sich ein kartesischer Ansatz:

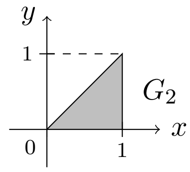
$G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$



$$\iint\limits_{G_1} f(x, y)\,\mathrm{d}A = \int_0^1\int_0^1 (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{28}{45}$$

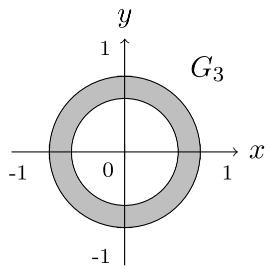
b) Für das Gebiet G_2 eignet sich ein kartesischer Ansatz:

$G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$ ist ein Normalbereich bzgl. der y-Achse.



$$\iint\limits_{G_2} f(x, y)\,\mathrm{d}A = \int_0^1\int_y^1 (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{14}{45}$$

c) Für das Gebiet G_3 eignet sich ein Ansatz in Polarkoordinaten:



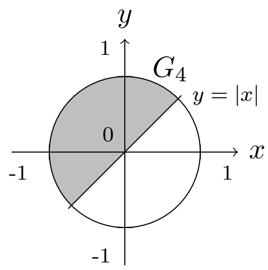
$G_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 1\}$ ist ein Kreisring mit innerem Radius $r_< = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und äußerem Radius $r_> = 1$, also folgt:

$G_3 = G_P = \{(r,\varphi) \,|\, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$

Es ist $f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = (r^2)^2 = r^4$

$$\iint\limits_{G_3} f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{G_P} r^4 \cdot r\,\mathrm{d}(r,\varphi) = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_0^{2\pi} r^5\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} r^5\,\mathrm{d}r = \frac{7\pi}{24}$$

d) Für das Gebiet G_4 eignet sich ein Ansatz in Polarkoordinaten:



$G_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1, x \leq y\}$ ist ein Halbkreis mit Radius $r_0 = 1$, also folgt:

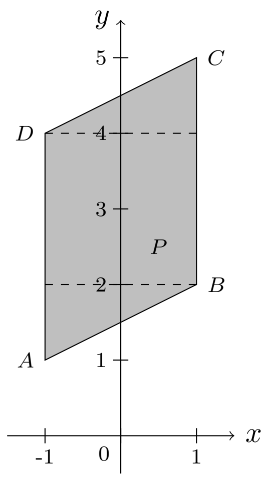
$G_4 = G_P = \{(r,\varphi) \,|\, 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}\}$

Es ist $f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = (r^2)^2 = r^4$

$$\iint\limits_{G_4} f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{G_P} r^4 \cdot r\,\mathrm{d}(r,\varphi) = \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} r^5\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} r^5\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}$$

Bemerkung: Da $f(x,y)$ radialsymmetrisch ist (d.h. der Funktionswert ist unabhängig vom Polarwinkel φ), kann bzgl. φ über ein beliebiges Intervall der Länge π integriert werden.

Aufgabe 3 Man betrachte im Folgenden das Parallelogramm P.



Eckpunkte: $A = (-1,1)$, $B = (1,2)$, $C = (1,5)$, $D = (-1,4)$.

Die untere Grenze $\overline{AB}$ lautet: $y = 1 + \frac{1}{2}(x+1) = \frac{3}{2} + \frac{x}{2}$.

Die obere Grenze $\overline{DC}$ lautet: $y = 4 + \frac{1}{2}(x+1) = \frac{9}{2} + \frac{x}{2}$.

Untere Grenze aufgelöst nach x: $x = 2y - 3$

Obere Grenze aufgelöst nach x: $x = 2y - 9$

a) Wird zunächst nach y, dann nach x integriert, so gilt mit dem Normalbereich bzgl. der x-Achse, $P = G_x = \{(x,y) \,|\, -1 \leq x \leq 1, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$:

$$\iint\limits_P f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{1} \int_{\frac{3}{2}+\frac{x}{2}}^{\frac{9}{2}+\frac{x}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

b) Wird zunächst nach x, dann nach y integriert, so gilt mit dem Normalbereich bzgl. der y-Achse, $P = G_y = \{(x,y) \,|\, 1 \le y \le 5, \Psi_1(y) \le x \le \Psi_2(y)\}$ mit

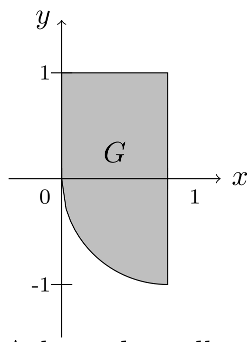
$$\Psi_1(y) = \begin{cases} -1 & \text{, für } 1 \le y \le 4 \\ 2y-9 & \text{, für } 4 < y \le 5 \end{cases}$$
$$\Psi_2(y) = \begin{cases} 2y-3 & \text{, für } 1 \le y \le 2 \\ 1 & \text{, für } 2 < y \le 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}A &= \int_1^5 \int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_1^2 \int_{-1}^{2y-3} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_2^4 \int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_4^5 \int_{2y-9}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Darstellung $P = G_y$, d.h. mit einem Normalbereich bzgl. der y-Achse, ist deutlich komplizierter und aufwändiger zur Berechnung des Doppelintegrals. Es ist daher $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ anstelle von $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ zu bevorzugen.

Aufgabe 4 Das Doppelintegral $I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ ist derart umzuschreiben, dass zuerst nach x, dann nach y integriert wird.

Es lässt sich aus dem Doppelintegral der Bereich G ablesen, über den integriert wird (siehe Skizze). Die untere Begrenzung lautet:



$$h(x) = -\sqrt{2x-x^2} \quad \text{für } x \in [0,1]$$

Aufgelöst nach x ergibt sich (für $y \in [-1,0]$):

$$x = 1 - \sqrt{1-y^2}$$

Das Integrationsgebiet lässt sich also als Normalbereich bzgl. beider Achsen darstellen:

$$\begin{aligned} G = G_x &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1, -\sqrt{2x-x^2} \le y \le 1\} \\ = G_y &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \le y \le 1, \Psi_1(y) \le x \le 1\}\end{aligned}$$

mit

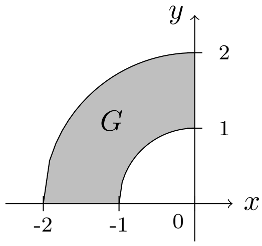
$$\Psi_1(y) = \begin{cases} 1-\sqrt{1-y^2} & \text{, für } -1 \le y \le 0 \\ 0 & \text{, für } 0 < y \le 1 \end{cases}$$

Es gilt also:

$$I = \int_{-1}^0 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Aufgabe 5

a) Das Integrationsgebiet G liegt im 2. Quadranten und stellt einen Kreisring dar.



Zur Beschreibung eignen sich Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\} \\ &= G_P = \{(r,\varphi) \,|\, 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\} \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$ lautet in Polarkoordinaten:

$$f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = r\sin(\varphi) \cdot r = r^2 \sin(\varphi)$$

Es gilt für das Doppelintegral:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{G_P} r^2 \sin(\varphi) \cdot r \,\mathrm{d}(r,\varphi) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^2 r^3 \sin(\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{15}{4}$$

b) Der Integrand $\exp(-x^2 - y^2)$ lässt sich in Polarkoordinaten darstellen als $\exp(-r^2)$. Es gilt:

$$G = \mathbb{R}^2 = G_P = \{(r,\varphi) \,|\, r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

Es folgt für das zu bestimmende Integral:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}A = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \pi$$

c) Mit $I = \sqrt{I^2}$ und dem Ergebnis I^2 aus Teilaufgabe b) findet man für das 1D-Integral:

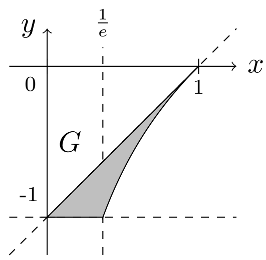
$$I = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \Big(\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x}_{=I} \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y}_{=I}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

Aufgabe 6

a) G wird eingeschlossen von $y = \ln(x)$, $y = x - 1$ und $y = -1$.

Zur Beschreibung eignen sich kartesische Koordinaten:

G



$$\begin{aligned} \ln(x) = -1 &\Leftrightarrow\ x = \frac{1}{e} \\ \ln(x) = x - 1 &\Leftrightarrow\ x = 1 \\ -1 = x - 1 &\Leftrightarrow\ x = 0 \end{aligned}$$

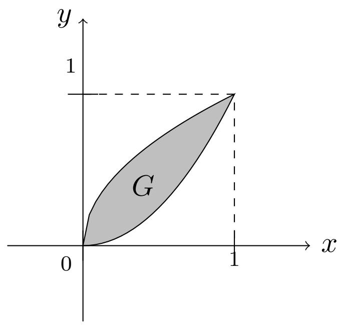
Der linke Rand ist stets durch die Gerade $y = x-1$ (also $x = y+1$) beschrieben, der rechte Rand stets durch $y = \ln(x)$ (also $x = e^y$). Daher ist $G = G_y$ die einfachere Beschreibung des Integrationsgebiets:

$$G = G_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 0, y + 1 \leq x \leq e^y\}$$

Um den Flächeninhalt von G zu bestimmen ist $f : G \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 1$ zu betrachten:

$$A = \iint\limits_G 1 \, \mathrm{d}A = \int_{-1}^{0} \int_{y+1}^{e^y} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \approx 0,13$$

Aufgabe 7 G wird eingeschlossen von $y = x^2$ und $x = y^2$.



Aufgrund er Symmetrie des Gebiets G ist eine Darstellung als Normalbereich bzgl. x- sowie y-Achse ähnlich aufwändig. Es gilt:

$$G = G_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1, x^2 < y \leq \sqrt{x}\}$$

Für die Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{x}{y}$ (es gilt stets $y > 0$) folgt für das gesuchte Volumen:

$$V = \iint\limits_G f(x, y) \, \mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x}{y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = -\frac{3}{2} \int_0^1 x \ln(x) \, \mathrm{d}x$$

Die Stammfunktion zu $x \ln(x)$ lässt sich mittels partieller Integration finden:

$$\int x \ln(x) \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}(2 \ln(x) - 1) + c$$

Man erhält:

$$V = -\frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{4} (2 \ln(x) - 1) \right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

Bei der Auswertung der unteren Integrationsgrenze ist ein Grenzwert $x^2 \cdot 2 \ln(x)$ für $x \to 0$ zu argumentieren. Dies ist z.B. mithilfe von L'Hospital möglich:

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cdot 2 \ln(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2 \ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = „\frac{-\infty}{\infty}“ \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2}{x \cdot \frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \to 0}(-x^2) = 0^-$$