Übungsblatt 6 - Lösungshinweise

Aufgabe 1 Gesucht sind die stationären Punkte und deren Klassifizierung folgender Funktionen: (*Zusatzfrage: Bei welchen der lokalen Extrema handelt es sich um globale Extrema?*)

a) $p(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

$$\Rightarrow \nabla p(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 - 6y \\ -6x + 6y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

Daraus ergeben sich die beiden stationären Punkte $(x, y) = (0, 0)$ mit $f(0, 0) = 0$ oder $(x, y) = (1, 1)$ mit $f(1, 1) = -1$. Mit der Hesse-Matrix $\begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ folgt:

- $H_p(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ mit $\det H_p(0,0) = -36 < 0$, d.h. es gibt einen <u>Sattelpunkt</u> $(0, 0, 0)$
- $H_p(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ mit $\det H_p(1,1) = 36 > 0$ und $p_{xx}(1,1) = 12 > 0$, d.h. es gibt ein <u>lokales Minimum</u> $(1, 1, -1)$

Zur Zusatzfrage: Das lokale Minimum ist <u>kein globales Minimum</u>, da z.B. $p(x, -1) = 2x^3 + 6x + 3$ beliebig klein werden kann: $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x, -1) = -\infty$

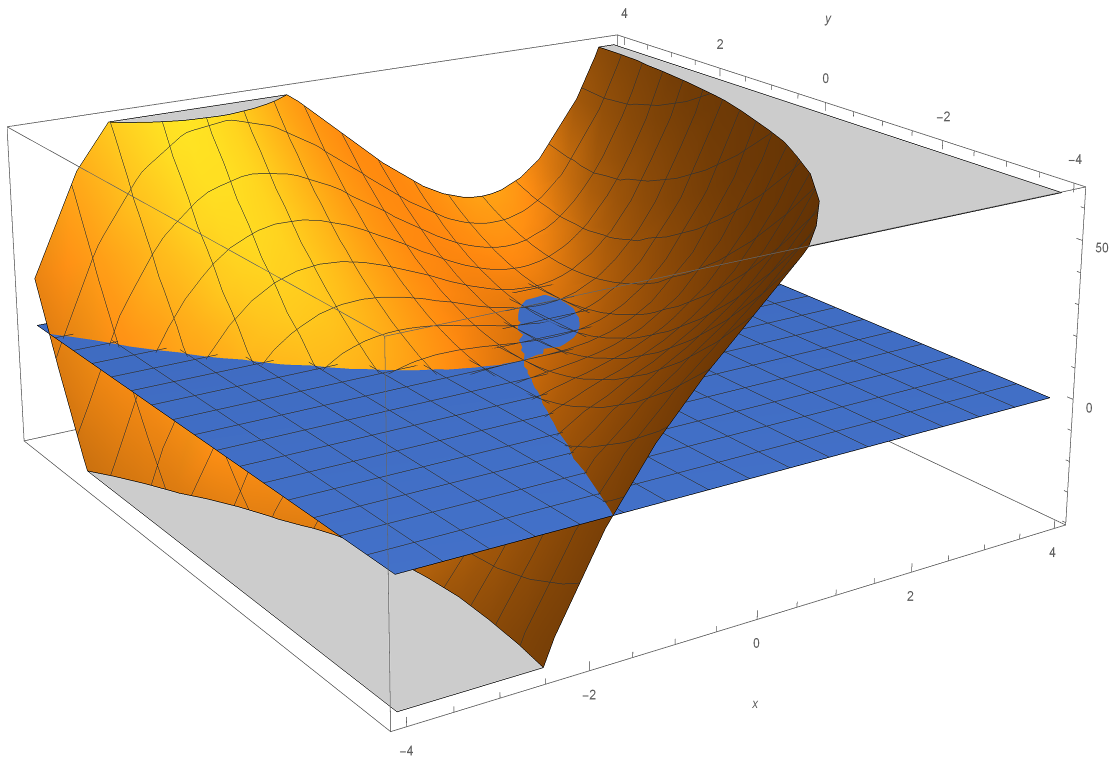

Abbildung 1a): Darstellung von $p(x, y) = 2x^3 + 6xy + 3y^2$ mit der horizontalen Ebene bei $c = 0$

b) $f(x,y) = (2x^2 + y)e^y$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = e^y \begin{pmatrix} 4x \\ 2x^2 + y + 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

Daraus ergibt sich ein stationärer Punkt $(x,y) = (0,-1)$ mit $f(0,-1) = -\frac{1}{e}$. Mit der Hesse-Matrix $H_f(x,y) = e^y \begin{pmatrix} 4 & 4x \\ 4x & 2x^2 + y + 2 \end{pmatrix}$ folgt:

$$H_f(0,-1) = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\det H_f(0,-1) = \frac{4}{e^2} > 0$ und $f_{xx} = \frac{4}{e} > 0$, d.h. es gibt ein lokales Minimum $(0, -1, -\frac{1}{e})$.

Zur Zusatzfrage: Das lokale Minimum ist auch ein globales Minimum, da $\nabla f(x,y)$ stetig ist und f nur einen stationären Punkt besitzt.

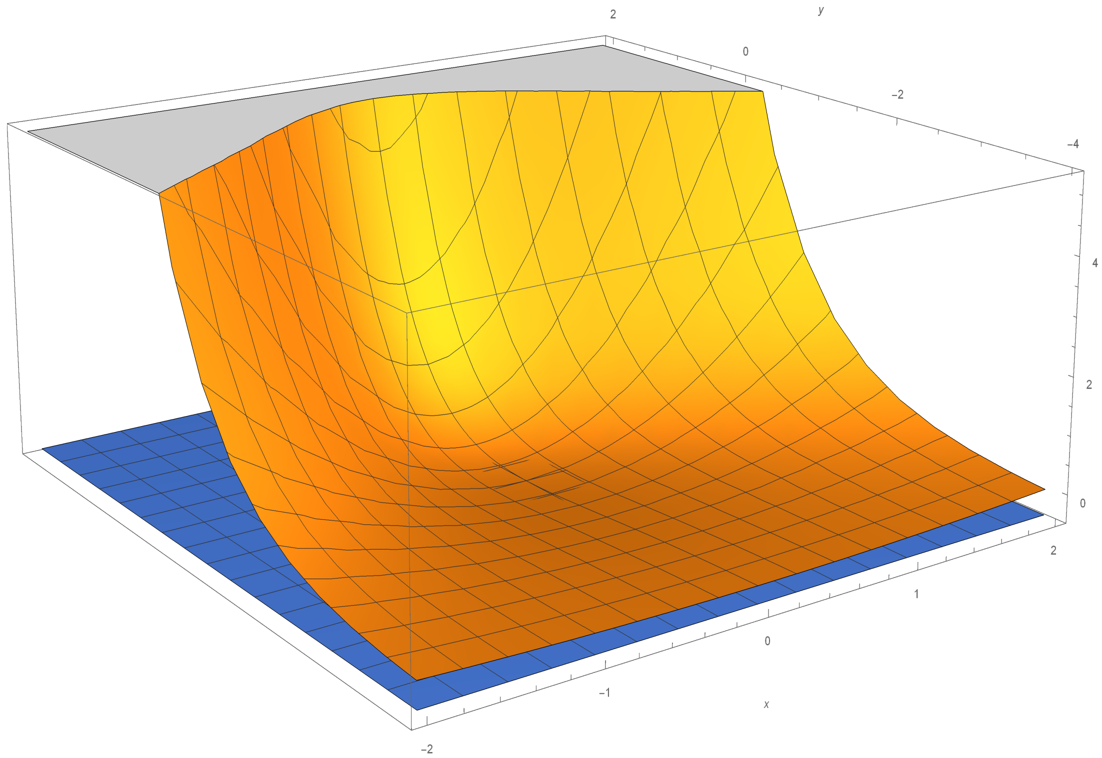

Abbildung 1b): Darstellung von $f(x,y) = (2x^2 + y)e^y$ mit der horizontalen Ebene bei $c = -\frac{1}{e}$

c) $g(x,y) = (x-3)^2 - x\cos(y)$

$$\Rightarrow \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-3) - \cos(y) \\ x\sin(y) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

Aus der ersten Möglichkeit $x = 0$ für die zweite Komponente ergibt sich in der ersten Komponente die unmögliche Bedingung $\cos(y) = -6$. Bleibt also die zweite Möglichkeit $y = n \cdot \pi$ für $n \in \mathbb{Z}$. In der ersten Komponente ergibt dies $x = \frac{1}{2}(\cos(y) + 3) = \frac{1}{2}(-1)^n + 3$.

Mit der Hesse-Matrix $H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \sin(y) \\ \sin(y) & x\cos(y) \end{pmatrix}$ folgt für die unendlich vielen stationären Punkte $(x_n, y_n) = (\frac{1}{2}(-1)^n + 3, n \cdot \pi)$:

$$H_g(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + 3(-1)^n \end{pmatrix}$$

Aufgrund des Vorzeichens $(-1)^n$ ist eine Fallunterscheidung vorzunehmen:

- $n \in \mathbb{Z}$ ungerade: $\Rightarrow$ $\det H_h(x_n, y_n) = -5 < 0$, also liegt ein Sattelpunkt vor. Die Funktionswerte sind dabei stets $g(x_n, y_n) = g(\frac{5}{2}, n \cdot \pi) = \frac{11}{4}$.
- $n \in \mathbb{Z}$ gerade: $\Rightarrow$ $\det H_h(x_n, y_n) = 7 > 0$ und $g_{xx} = 2 > 0$, also liegt ein lokales Minimum vor. Die Funktionswerte sind dabei stets $g(x_n, y_n) = g(\frac{7}{2}, n \cdot \pi) = -\frac{13}{4}$

Zur Zusatzfrage: Jedes der lokalen Minima ist aufgrund der gleichen Funktionswerte und der Stetigkeit von $\nabla g(x,y)$ auch ein globales Minimum.

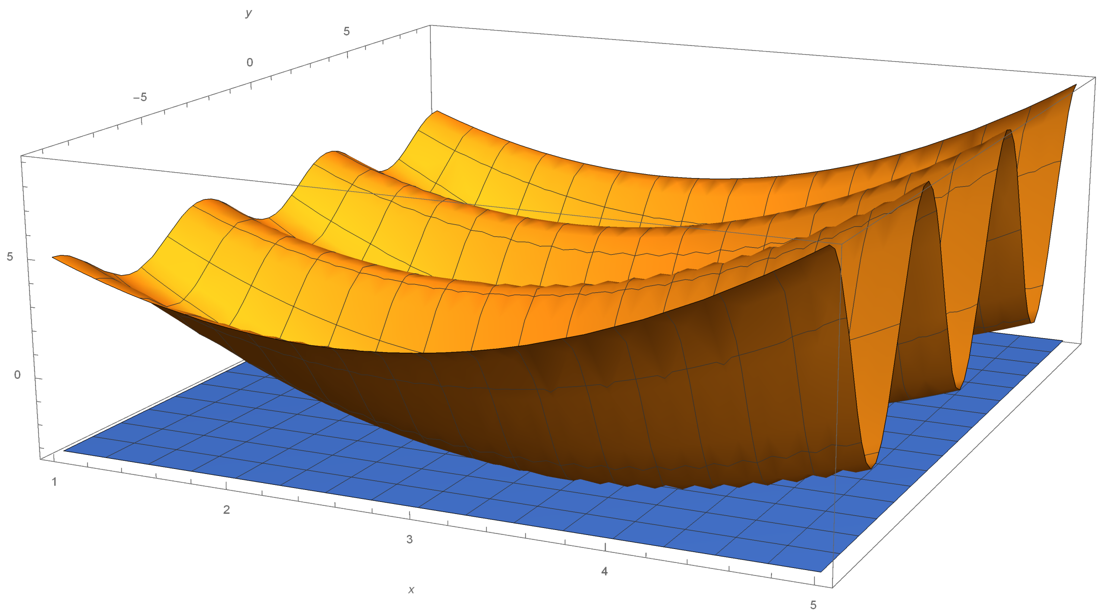

Abbildung 1c): Darstellung von $g(x,y) = (x-3)^2 - x\cos(y)$ mit der horizontalen Ebene bei $c = -\frac{13}{4}$

d) $h(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

$$\Rightarrow \nabla h(x,y) = \frac{2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

Der einzige Kandidat für einen stationären Punkt wäre $(x,y) = (0,0)$, der aber nicht im Definitionsbereich von h liegt: $D = D_{\max} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Daher besitzt die Funktion h keine stationären Punkte.

Aufgabe 2 Es ist $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$ auf dem quadratischen Gebiet $G = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ gegeben.
(Beobachtung: f ist symmetrisch bezüglich der Vertauschung der beiden Variablen $x \leftrightarrow y$, d.h. $f(x,y) = f(y,x)$.)

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) + \cos(x+y) \\ \cos(y) + \cos(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{y}{2})\cos(x+\frac{y}{2}) \\ 2\cos(\frac{x}{2})\cos(y+\frac{x}{2}) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

Der jeweils erste Faktor $\cos(\frac{\cdot}{2})$ ist auf dem Gebiet G stets positiv, daher erhält man zwei Bedingungen aus dem jeweils zweiten Faktor:

$$\cos(x + \tfrac{y}{2}) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \pi - 2x \quad \text{und} \quad \cos(y + \tfrac{x}{2}) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

Sind beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt, so muss $x = \frac{\pi}{3}$ (und somit $y = \frac{\pi}{3}$) gelten. Der einzige stationäre Punkt im Innern von G ist also $(x,y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ mit Funktionswert $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Für die Hesse-Matrix gilt:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) - \sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(y) - \sin(x+y) \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

mit $\det H_f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{9}{4} > 0$ und $f_{xx} = -\sqrt{3} < 0$, also liegt bei $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ ein lokales Maximum vor.

Am Rand von G liegen vier Strecken, die separat ausgewertet werden müssen. Methoden der Differentialrechnung einer Veränderlichen kommen zur Anwendung:

- Für $x = 0$ gilt $f(0,y) = 2\sin(y)$. Mit $f'(0,y) = 2\cos(y)$ und $f''(0,y) = -2\sin(y)$ findet man ein Randmaximum bei $(x,y) = (0, \frac{\pi}{2})$ mit Funktionswert $f(0, \frac{\pi}{2}) = 2$.
- Für $y = 0$ gilt $f(x,0) = 2\sin(x)$ und man findet mit analoger Rechnung ein Randmaximum bei $(x,y) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ mit Funktionswert $f(\frac{\pi}{2}, 0) = 2$. Hier macht sich die anfangs beobachtete Symmetrie $x \leftrightarrow y$ bemerkbar.
- Für $x = \frac{\pi}{2}$ gilt $f(\frac{\pi}{2}, y) = 1 + \sin(y) + \sin(\frac{\pi}{2} + y) = 1 + \sin(y) + \cos(y)$. Man findet mit der ersten und zweiten Ableitung ein Randmaximum bei $(x,y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ mit Funktionswert $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = 1 + \sqrt{2}$.
- Für $y = \frac{\pi}{2}$ gilt $f(x, \frac{\pi}{2}) = 1 + \sin(x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) = 1 + \sin(x) + \cos(x)$. Man findet wieder (Symmetrie!) ein Randmaximum bei $(x,y) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ mit Funktionswert $f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = 1 + \sqrt{2}$.

Es verbleiben noch die Ecken des Gebiets G zu betrachten, wovon allerdings $(0, \frac{\pi}{2})$ und $(\frac{\pi}{2}, 0)$ als Randmaximum identifiziert wurden. Es verbleiben $f(0,0) = 0$ und $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2$ mit den bisherigen Kandidaten für die globalen Extrema zu vergleichen.

Zusammenfassend folgt aus den insgesamt 6 Kandidaten (ein stationärer Punkt im Innern, vier Randmaxima (zwei davon auf einer Ecke) sowie zwei zusätzliche Ecken):

- f besitzt ein globales Maximum bei $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$
- f besitzt ein globales Minimum bei $(0, 0, 0)$

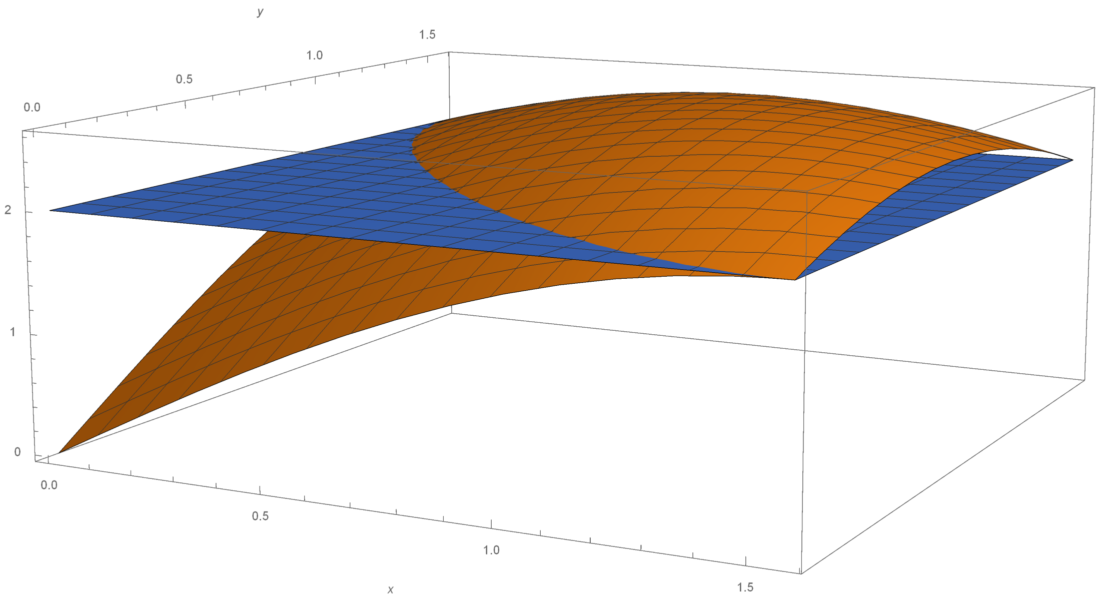

Abbildung 2: Darstellung von $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$ mit der horizontalen Ebene bei $c = 2$

Aufgabe 3 Gegeben ist $f(x,y) = x^2 - \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4} - x$ auf der Ellipse $E = \{(x,y)\,|\,x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1\}$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - \frac{y}{2} - 1 \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

Daraus ergibt sich als einziger stationärer Punkt $(x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ mit Funktionswert $f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$. Für die Hesse Matrix gilt:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

mit $\det H_f = \frac{3}{4} > 0$ und $f_{xx} = 2 > 0$, also liegt bei $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ ein <u>lokales Minimum</u> vor.
Der Rand von E lässt sich in einen oberen (r_1) sowie unteren Ast (r_2) der Ellipse aufteilen. Es gilt $(x,y) \in E \;\Leftrightarrow\; y = \pm 2\sqrt{1-x^2}$ für $x \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned} r_1(x) &:= f(x, +2\sqrt{1-x^2}) = 1 - x - x\sqrt{1-x^2} \\ r_2(x) &:= f(x, -2\sqrt{1-x^2}) = 1 - x + x\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Für den oberen Rand der Ellipse erhält man mit $r_1'(x) = -1 - \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \overset{!}{=} 0$:

$$\sqrt{1-x^2} = 2x^2 - 1 \quad (*)$$

Durch Quadrieren von $(*)$ (keine Äquivalenzumformung!) erhält man Kandidaten der Lösung für $r_1'(x) = 0$:

$$x^2(4x^2 - 3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 = 0 \quad \text{oder} \quad x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Es zeigt sich, dass $x_0 = 0$ keine Lösung von $(*)$ ist, $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ hingegen schon. Damit folgt $y_{1,2} = 2\sqrt{1-x_{1,2}^2} = 1$, d.h. man erhält zwei Punkte am Rand der Ellipse: $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ und $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$. Zusätzlich sind die Enden (bzw. „Ecken") des oberen Randes, $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ mögliche Punkte für globale Extrema.

Analog erhält man für den unteren Rand der Ellipse mit $r_2'(x) = -1 + \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \stackrel{!}{=} 0$:

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - 2x^2 \quad (**)$$

Wieder erhält man durch Quadrieren von $(**)$ (keine Äquivalenzumformung!) die selben Kandidaten der Lösung für $r_2'(x) = 0$: $x_0 = 0$ oder $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Diesmal ist $x_0 = 0$ eine tatsächliche Lösung von $(**)$, $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ hingegen nicht. Damit folgt $y_0 = 2\sqrt{1-x_0^2} = 2$. Es ergibt also sich der zusätzliche Punkt $(0, 2)$.

Insgesamt erhält man 6 Kandidaten (ein stationärer Punkt im Innern, zwei Punkte auf dem oberen Rand der Ellipse, einer auf dem unteren Rand und zwei „Ecken"):

- lokales Minimum $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ mit $\frac{1}{3} \approx -0.33$
- Randpunkte
  - oberer Rand der Ellipse: $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4})$ mit $1 - \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx -0.30)$
  - $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4})$ mit $1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 2.30)$
  - untere Rand der Ellipse: $(0, -2, 1)$
- Ecken $(-1, 0, 2)$ und $(1, 0, 0)$

Zusammenfassend ergibt sich:

- f besitzt ein globales Maximum auf dem oberen Rand der Ellipse bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4})$
- f besitzt ein globales Minimum im Inneren von G bei $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

Aufgabe 4 Für gegebenes Volumen $V > 0$ sollen die Kantenlängen $x, y, z > 0$ derart gewählt werden, sodass die Oberfläche $A(x, y, z)$ minimal ist. A beinhaltet fünf Flächen:

$$A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

Auflösen nach z ergibt: $z = \frac{V}{xy}$, sodass sich $A(x, y, \frac{V}{xy}) = xy + 2V(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) =: f(x, y)$ ergibt.

$$\Rightarrow \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y - \frac{2V}{x^2} \\ x - \frac{2V}{y^2} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

Es gibt einen stationären Punkt $(x_0, y_0) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$. Für die Hesse-Matrix gilt:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{4V}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4V}{y^3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es ist $\det H_f(x_0, y_0) = 3 > 0$ und $f_{xx}(x_0, y_0) = 2 > 0$, also liegt bei (x_0, y_0) ein lokales Minimum von f vor. Der zugehörige Wert für z ergibt sich zu $z_0 = \frac{V}{x_0 y_0} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$.

$\Rightarrow$ Die Kantenlängen $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}})$ minimieren die Fläche $A(x, y, z)$ der nach oben offenen Kiste mit Volumen V.

Aufgabe 5 Betrachte $f(x,y) = x^2y$ auf $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, 4x^2 + 9y^2 = 36\}$
Aus der dritten Bedingung folgt

$$\begin{aligned}
4x^2 + 9y^2 &= 36 \\
\Leftrightarrow y^2 &= \frac{1}{9}(36 - 4x^2) \quad \text{für } x \geq 0 \; y \geq 0 \\
\Leftrightarrow y &= \frac{1}{3}\sqrt{36 - 4x^2} \quad \text{für } x \in [0,3]
\end{aligned}$$

Betrachte für $x \in [0,3]$ also die Funktion

$$r(x) := f(x, \frac{1}{3}\sqrt{36 - 4x^2}) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{36 - 4x^2}$$

$$\Rightarrow \quad r'(x) = \frac{2x(x^2 - 6)}{\sqrt{9 - x^2}}$$

mit Nullstellen $x = 0$ und $x = \sqrt{6}$. Zusätzlich ist die Ecke $x = 3$ zu betrachten:

$$r(0) = 0, \quad r(\sqrt{6}) = 4\sqrt{3}, \quad r(3) = 0$$

Da $r(x) \geq 0$ und stetig ist, gibt es zwei globale Minima von r: $(0,0)$ und $(3,0)$, sowie ein globales Maximum $(\sqrt{6}, 4\sqrt{3})$.
Die Funktion $f(x,y)$ besitzt auf G also drei globale Extrema: $(0,2,0)$ sowie $(3,0,0)$ sind globale Minima, $(\sqrt{6}, \frac{2}{3}\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ ist das globale Maximum.

Aufgabe 6 Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = e^{x^2+y}$ auf dem Einheitskreis $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \geq 1\}$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2+y} \cdot 2x \\ e^{x^2+y} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0} \quad \Rightarrow \text{keine stationären Punkte im Innern von } K$$

Die Betrachtung des Randes von K ist mithilfe einer Parametrisierung in Polarkoordinaten (Radius $r = 1$) möglich. Betrachte für $\varphi \in [0, 2\pi)$ die Komponenten $x(\varphi) = \cos(\varphi)$ und $y(\varphi) = \sin(\varphi)$, woraus folgt:

$$r(\varphi) := f(x(\varphi) + y(\varphi)) = \exp(\cos^2(\varphi) + \sin(\varphi))$$

Es folgt:

$$r'(\varphi) = r(\varphi)\cos(\varphi)(1 - 2\sin(\varphi)) \stackrel{!}{=} 0 \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Es ergeben sich vier Nullstellen:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \; \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}, \; \varphi_3 = \frac{\pi}{6}, \; \varphi_4 = \frac{5\pi}{6}$$

Zusätzlich ist als Ecke der Randpunkt $\varphi_0 = 0$ des Intervalls $[0, 2\pi)$ zu betrachten.

φ_k	$r(\varphi)$	$x(\varphi)$	$y(\varphi)$
0	e	1	0
$\frac{\pi}{2}$	e	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{1}{e}$	0	-1
$\frac{\pi}{6}$	$e^{\frac{5}{4}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$e^{\frac{5}{4}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Mit $e \approx 2,71$, $\frac{1}{e} \approx 0,37$ und $e^{\frac{5}{4}} \approx 3,49$ ergibt sich für die Funktion f auf K ein globales Minimum bei $(0, -1, \frac{1}{e})$ sowie zwei globale Maxima bei $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, e^{\frac{5}{4}})$.