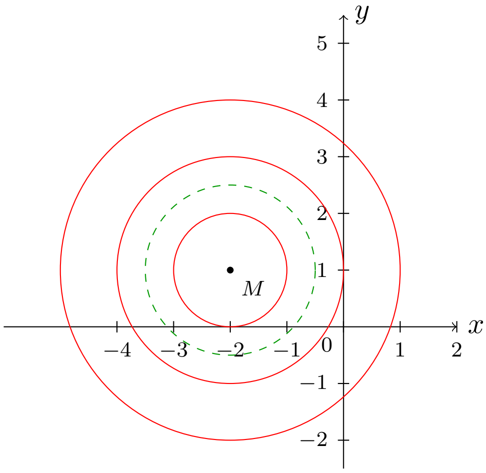
Übungsblatt 5 - Lösungshinweise

Aufgabe 1 Gegeben ist die Funktion $h(x, y) = 1 - 4x - x^2 + 2y - y^2$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Höhenlinien ergeben sich für $c \in \mathbb{R}$ durch die Bedingung

$$\begin{aligned} h(x, y) = c \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 4x - y^2 + 2y - y^2 = c \\ &\Leftrightarrow \quad (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 6 - c =: r^2 \end{aligned}$$

Mittels quadratischer Ergänzung ergibt sich diese Gleichung, die einen Kreis um Mittelpunkt $M = (-2, 1)$ und Radius $r = \sqrt{6 - c}$ beschreibt. Für $c \leq 6$ lässt sich dies lösen, für $c > 6$ gibt es keine Höhenlinien.

c	$r(c)$
-3	3
2	2
5	1
6	0



Es ist $h(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+2)^2+(y+1)^2 = 6$, was einem Kreis um $(-2, 1)$ mit Radius $r = \sqrt{6}$ entspricht (Darstellung als grün-gestrichtelte Höhenlinie in der Skizze).

Aufgabe 2 Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 6y$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

a) Die Höhenlinien stellen sich mittels quadratischer Ergänzung für $c \in \mathbb{R}$ dar als

$$f(x, y) = c \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 - (y + 3)^2 = c - 8$$

Für $\boxed{c = 8}$ ergeben sich Geradengleichungen:

$$\begin{aligned} & (x - 1)^2 - (y + 3)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & |x - 1| = |y + 3| \\ \Leftrightarrow \quad & y = x - 4 \quad \text{oder} \quad y = -x - 2 \end{aligned}$$

Für $\boxed{c > 8}$ ergeben sich Hyperbelgleichungen:

$$\begin{aligned} & (x - 1)^2 - (y + 3)^2 = c - 8 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\frac{x - 1}{\sqrt{c - 8}}\right)^2 - \left(\frac{y + 3}{\sqrt{c - 8}}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

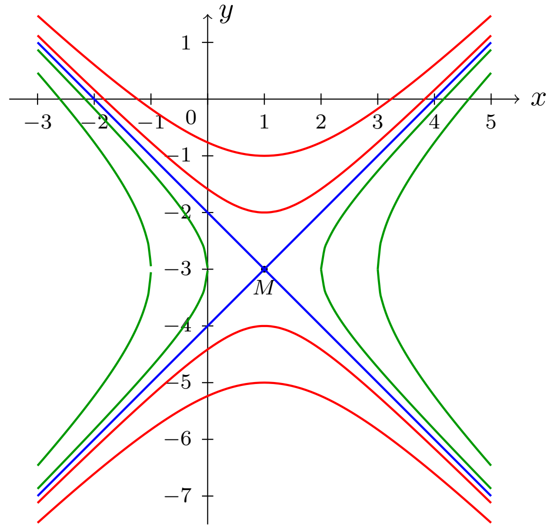
Dies ist eine Hyperbel mit Mittelpunkt $M = (1, -3)$ und Halbachsen $a = b = \sqrt{c - 8}$.

Für $\boxed{c < 8}$ ergeben sich Hyperbelgleichungen:

$$
\begin{aligned}
& (x-1)^2 - (y+3)^2 = c - 8 < 0 \\
& (y+3)^2 - (x-1)^2 = 8 - c > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{y+3}{\sqrt{8-c}}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{\sqrt{8-c}}\right)^2 = 1
\end{aligned}
$$

Dies ist eine Hyperbel mit Mittelpunkt $M = (1, -3)$ und Halbachsen $a = b = \sqrt{8-c}$.

$c = 8$
$c \in \{9, 12\}$
$c \in \{4, 7\}$



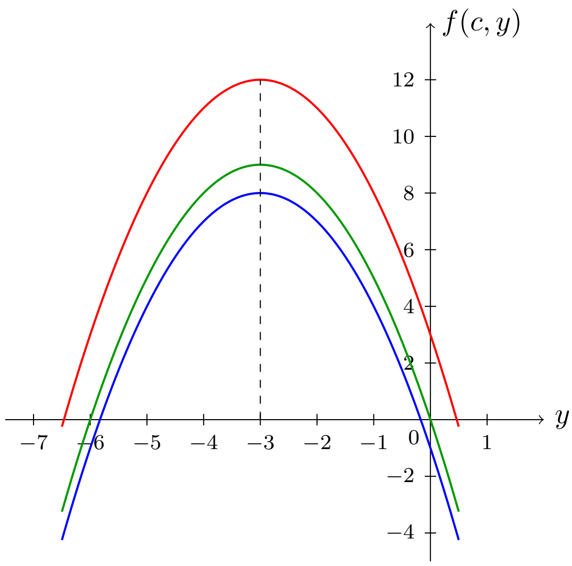
b) f ist nicht beschränkt, da sich für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Höhenlinie finden lässt.
Alternativ kann man argumentieren, dass für sehr große x die Funktion $f(x, \cdot)$ beliebig groß wird und für sehr große y die Funktion $f(\cdot, y)$ beliebig klein wird.

c) <u>Schnittkurven für $x = c \in \mathbb{R}$</u>
Es ist $f(c, y) = c^2 - y^2 - 2c - 6y = -(y+3)^2 + \underbrace{(c^2 - 2c + 9)}_{=\text{const.}=m(c)}$.

Dies entspricht einer nach unten geöffnete Parabel mit Maximum $m(c)$ bei $y = -3$.

c	$m(c)$
-1	12
0	9
1	8
2	9
3	12

Hinweis: Die Farb-Codierung in dieser Teilaufgabe ist unabhängig von der in der vorherigen Teilaufgabe.



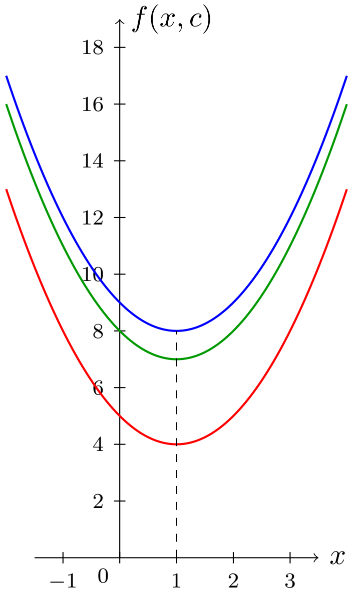
d) <u>Schnittkurven für $y = c \in \mathbb{R}$</u>

Es ist $f(x,c) = x^2 - c^2 - 2x - 6c = (x-1)^2 + \underbrace{(-c^2 - 6c - 1)}_{=\text{const.}=m(c)}$.

Dies entspricht einer nach oben geöffnete Parabel mit Minimum $m(c)$ bei $x = 1$.

c	$m(c)$
-5	4
-4	7
-3	8
-2	7
-1	4

Hinweis: Die Farb-Codierung in dieser Teilaufgabe ist unabhängig von der in der vorherigen Teilaufgabe.



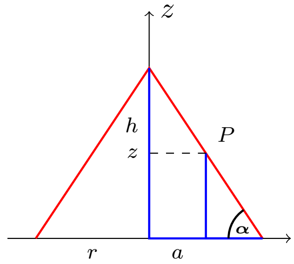
e) Eine graphische Darstellung der **Sattelfläche** lässt sich z.B. mit WolframAlpha erzeugen. Unter `https://www.wolframalpha.com/` ist dazu folgende Befehlszeile einzugeben:

```
Plot[x^2-y^2-2x-6y,{x,-1,3},{y,-5,-1}]
```

Um den Mittelpunkt $M = (1,-3)$ wird im Definitionsbereichs $D = [-1,3] \times [-5,-1]$ damit die Sattelfläche $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x - 6y$ mit den in den Teilaufgaben a) bis d) untersuchten Eigenschaften dargestellt.

Aufgabe 3

Ein Kreiskegel mit Höhe $h > 0$ und Radius $r > 0$ sei fest vorgegeben. Ein Schnitt durch den Kegel, der die z-Achse enthält, stellt sich dar wie rechts skizziert.



a) Ein Punkt P auf dem Kegelmantel lässt sich darstellen durch $a \in [0, r]$:

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{r} = \frac{z}{r-a} \quad (*)$$
$$\Rightarrow z = z(a) = \frac{h}{r}(r-a) = h - \frac{ha}{r}$$

Der gesamte Kegelmantel entsteht durch Rotation um die z-Achse, d.h. für $\varphi \in [0, 2\pi)$ gilt:

$$x = a \cdot \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad y = a \cdot \sin(\varphi)$$

Zusammen mit $z = h - \frac{ha}{r}$ ergibt sich als Parameterdarstellung:

$$M = \left\{ \left(a\cos(\varphi), b\sin(\varphi), h - \tfrac{ha}{r} \right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \in [0, r], \varphi \in [0, 2\pi) \right\}$$

b) Implizite Darstellung

Schneidet man den Kegel in der Höhe $z \in [0, h]$, so ergibt sich eine Kreisscheibe mit Radius $a = a(z) = r\left(1 - \frac{z}{h}\right)$, was sich aus $(*)$ der vorherigen Teilaufgabe ergibt. Es ist $a \in [0, r]$ und führt zu

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \sqrt{x^2 + y^2} = r\left(1 - \frac{z}{h}\right) \right\}$$

Explizite Darstellung

Die Höhe des Punktes P ist aich eine Funktion von x und y: $a = \sqrt{x^2 + y^2}$. Damit folgt (wieder aus $(*)$):

$$z = z(x, y) = h - \frac{ha}{r} = h - \frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2} =: f(x, y)$$

Für den Definitionsbereich $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq r^2\}$ ist $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion, für dessen Graphen $G = \{(x, y, f(x, y) \,|\, (x, y) \in D\}$ gilt:

$$M = G = \left\{ \left(x, y, h - \frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq r^2 \right\}$$

Aufgabe 4 Es sind im Folgenden $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Skalarfelder.

a) $f(x, y) = x^3 + x^2y + y^4 - 6xy$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_x &= 3x^2 + 2xy - 6y \\ f_y &= x^2 + 4y^3 - 6x \end{aligned}$$

b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^4 + 1)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_x &= \frac{2x}{x^2 + y^4 + 1} \\ f_y &= \frac{4y^3}{x^2 + y^4 + 1} \end{aligned}$$

c) $f(x, y) = x^y$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_x &= yx^{y-1} \\ f_y &= x^y \cdot \ln(x) \end{aligned}$$

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{x-y}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_x &= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{x-y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + 1 \right) \\ f_y &= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{x-y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

e) $f(x, y) = x^2 \cos(y) - \cos(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_x &= 2x \cos(y) + \sin(x) \\ f_y &= -x^2 \sin(y) \end{aligned}$$

f) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x+1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_x &= \frac{2^2 + 2x + y^2}{(x + 1)^2} \\ f_y &= -\frac{2y}{x + 1} \end{aligned}$$

Aufgabe 5 Gesucht sind Tangentialebenen zu

a) $f(x,y) = e^{xy}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (2,0)$

Es ist $t(x,y) = f(2,0) + f_x(2,0) \cdot (x-2) + f_y(2,0) \cdot y$ mit

$$\begin{aligned} & & f(2,0) &= 1 \\ f_x = e^{xy} \cdot y & \quad \Rightarrow & f_x(2,0) &= 0 \\ f_y = e^{xy} \cdot x & \quad \Rightarrow & f_y(2,0) &= 2 \end{aligned}$$

Damit ist $t(x,y) = 1 + 2y$

b) $g(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (1,-2)$

Es ist $t(x,y) = g(1,-2) + g_x(1,-2) \cdot (x-1) + g_y(1,-2) \cdot (y+2)$ mit

$$\begin{aligned} & & g(1,-2) &= \ln(5) \\ g_x = \frac{2x}{x^2+y^2} & \quad \Rightarrow & g_x(1,-2) &= \frac{2}{5} \\ g_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot x & \quad \Rightarrow & f_y(1,-2) &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Damit ist $t(x,y) = \ln(5) + \frac{2}{5}(x-1) - \frac{4}{5}(y+2) = \frac{2}{5}(x-2y) + \ln(5) - 2$

Aufgabe 6 Zu $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2 \ln(x_3) - x_1^2 x_2 e^{x_1}$ sind sämtliche ersten und zweiten partiellen Ableitungen gesucht.

Erster Ordnung; Notation: $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

$$\begin{aligned} f_1 &= 2x_1 - x_1 x_2 e^{x_1}(2+x_1) \\ f_2 &= \ln(x_3) - x_1^2 e^{x_1} \\ f_3 &= \frac{x_2}{x_3} \end{aligned}$$

Zweiter Ordnung; Notation: $f_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

$$\begin{aligned} f_{11} &= 2 - x_2 e^{x_1}(2 + 4x_1 + x_1^2) \\ f_{22} &= 0 \\ f_{33} &= -\frac{x_2}{x_3^2} \\ f_{12} &= -x_1 e^{x_1}(2+x_1) \\ f_{13} &= 0 \\ f_{21} &= -x_1 e^{x_1}(2+x_1) = f_{12} \\ f_{23} &= \frac{1}{x_3} \\ f_{31} &= 0 = f_{13} \\ f_{32} &= \frac{1}{x_3} = f_{32} \end{aligned}$$

Aufgabe 7 Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ ist eine Näherungslösung für $f(\frac{11}{5}, -\frac{1}{5})$ mit Hilfe des totalen Differentials von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (2,0)$ gesucht. Die lineare Approximation kann gewählt werden, wenn man sich für Punkte in der Nähe des Tangentialpunkt interessiert. Mit $\Delta x = \frac{11}{5} - x_0 = \frac{1}{5}$ und $\Delta y = -\frac{1}{5} - y_0 = -\frac{1}{5}$ ist diese Voraussetzung erfüllt.
Es ist $t(x,y) = f(2,0) + f_x(2,0) \cdot (x-2) + f_y(2,0) \cdot y$ mit

$$
\begin{aligned}
& & f(2,0) &= 3 \\
f_x &= \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}} \quad \Rightarrow & f_x(2,0) &= \tfrac{4}{3} \\
f_y &= \frac{e^{2y}}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}} \quad \Rightarrow & f_y(2,0) &= \tfrac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Damit gilt $t(x,y) = 3 + \frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1 + 4x + y)$, also

$$f(\tfrac{11}{5}, -\tfrac{1}{5}) \approx f(\tfrac{11}{5}, -\frac{1}{5}) = \tfrac{16}{5} = 3,2$$

Der Vergleich mit dem tatsächlichen Wert ergibt eine Abweichung von nur $0,54\%$:

$$f(\tfrac{11}{5}, -\tfrac{1}{5}) = \sqrt{\tfrac{242}{25} + e^{-\frac{2}{5}}} = 3,21719\ldots$$

Aufgabe 8 Im Folgenden werden Richtungsableitungen von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachtet.

a) Für die Abbildung f mit $(x,y) \mapsto y^2 \sin(x)$ und $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich als Gradient

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \cos(x) \\ 2y \sin(x) \end{pmatrix}$$

also für die Richtungsableitung

$$f_{\vec{v}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(y^2 \cos(x) + 4y \sin(x) \right)$$

b) Für die Abbildung f mit $(x,y,z) \mapsto e^{-xz} \sin(y)$ und $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -ze^{-xz} \sin(y) \\ e^{-xz} \cos(y) \\ -xe^{-xz} \sin(y) \end{pmatrix}$$

also für die Richtungsableitung

$$f_{\vec{v}}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \vec{v} = \frac{e^{-xz}}{\sqrt{42}} \left(-z \sin(y) + 5 \cos(y) - 4x \sin(y) \right)$$

Ausgewertet an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (0, \frac{3\pi}{2}, 1)$ ergibt sich $f_{\vec{v}}(0, \frac{3\pi}{2}, 1) = \frac{1}{\sqrt{42}}$

Aufgabe 9 Gegeben ist $T(x,y) = 2xy + x^2$

a) Es ist $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $(x_0, y_0) = (1,1)$. Damit folgt

$$f_{\vec{v}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2y+2x \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}}(y-x)$$

An der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$ gilt $f_{\vec{v}}(1,1) = 0$.

b) Der stärkste Anstieg liegt in Richtung des Gradienten $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y+2x \\ 2x \end{pmatrix}$. An der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$ gilt:

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\nabla f(1,1)| = 2\sqrt{5}$$

Damit lautet die Richtung des stärksten Anstiegs $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 10 Gegeben ist $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ sowie der Punkt $P(1,0,1)$.

a) Es ist $t(x,y,z) = f(1,0,1) + f_x(1,0,1)(x-1) + f_y(1,0,1)y + f_z(1,0,1)(z-1)$ mit

$$f_x(x,y,z) = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad f_x(1,0,1) = -\tfrac{\sqrt{2}}{4}$$

Man erhält ebenso $f_y(1,0,1) = 0$ und $f_z(1,0,1) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ sowie $f(1,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also:

$$t(x,y,z) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{\sqrt{2}}{4}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{4}(z-1) = \sqrt{2}\left(1 - \tfrac{x}{4} - \tfrac{z}{4}\right)$$

b) Für die zweimalige partielle Ableitung nach x ergibt sich:

$$f_{xx} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Analog erhält man f_{yy} und $4f_{zz}$. Für die angegebene Summe ergibt sich wie behauptet:

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} &= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\Big[\underbrace{(2x^2 - y^2 - z^2)}_{\sim f_{xx}} + \underbrace{(-x^2 + 2y^2 - z^2)}_{\sim f_{yy}} + \underbrace{(-x^2 - y^2 + 2z^2)}_{\sim f_{zz}}\Big] \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$