Übungsblatt 5

Aufgabe 1 Die Höhe eines Geländepunkts ist gegeben durch die Funktion

$$h(x, y) = 1 - 4x - x^2 + 2y - y^2$$

Beschreiben Sie die Höhenlinien von h zum Niveau $c \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie die Höhenlinien für $c \in \{-3, 2, 5, 6\}$.
Welche Geländepunkte liegen auf Höhe des Meeresspiegels, d.h. auf Höhenniveau Null?
Hinweis: Nutzen Sie die quadratische Ergänzung, um $h(x, y)$ geeignet umzuformen.

Aufgabe 2 Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 6y$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Beschreiben Sie für $c \in \mathbb{R}$ die Höhenlinien von f, indem Sie die drei Fälle $c = 8$, $c > 8$ und $c < 8$ unterschieden. Skizzieren Sie die Höhenlinien für die Niveaus $c \in \{4, 7, 8, 9, 12\}$.

b) Ist die Funktion f beschränkt?

c) Welche Schnittkurven ergeben sich für $x = c \in \mathbb{R}$? Betrachten Sie hierzu die Abbildung $y \mapsto f(c, y)$ und skizzieren Sie diese für $c \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

d) Welche Schnittkurven ergeben sich für $y = c \in \mathbb{R}$? Betrachten Sie hierzu die Abbildung $x \mapsto f(x, c)$ und skizzieren Sie diese für $c \in \{-5, -4, -3, -2, -1\}$.

e) Überprüfen Sie Ihre Vorstellung von dem Graphen von f mithilfe von Online-Tools.[1]

Aufgabe 3 Betrachten Sie einen Kreiskegel der Höhe h mit Radius r.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung des Kegelmantels M an.

b) Stellen Sie M auch implizit als Lösungsmenge einer Gleichung und explizit als Graph einer Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dar.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie für die nachstehenden Skalarfelder $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen erster Ordnung:

a) $f(x, y) = x^3 + x^2y + y^4 - 6xy$

b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^4 + 1)$

c) $f(x, y) = x^y$

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{x-y}$

e) $f(x, y) = x^2 \cos(y) - \cos(x)$

f) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x + 1}$

[1] Sie können dafür kostenfrei z.B. WolframAlpha unter `https://www.wolframalpha.com/` nutzen.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie die Tangentialebene der im angegebenen Punkt total differenzierbaren Funktion:

a) $f(x,\, y) = \mathrm{e}^{xy}$ im Punkt $(2,\, 0)$.

b) $g(x,\, y) = \ln(x^2 + y^2)$ im Punkt $(1,\, -2)$.

Aufgabe 6 Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 \ln(x_3) - x_1^2 x_2 e^{x_1}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$$

Aufgabe 7 Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,\, y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ ist total differenzierbar. Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Funktionswert $f(\frac{11}{5},\, -\frac{1}{5})$ mit Hilfe des totalen Differentials von f an der Stelle $(2, 0)$

Aufgabe 8 Bestimmen Sie die Richtungsableitung der nachstehenden Skalarfelder auf $\mathbb{R}^n$ mit

a) $(x, y) \mapsto y^2 \sin(x)$ in Richtung von $(1, 2)^\top$ für alle Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

b) $(x, y, z) \mapsto e^{-xz} \sin(y)$ in Richtung von $(1, 5, 4)^\top$ im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, \frac{3\pi}{2}, 1)$.

Aufgabe 9 In einer Ebene sei die Temperatur T gegeben durch $T(x, y) = 2xy + x^2$.

a) Welche Temperaturänderung stellt man bei Bewegung aus dem Punkt $(1, 1)$ in Richtung von $(1, -2)^\top$ fest?

b) In welche Richtung ändert sich die Temperatur ausgehend vom Punkt $(1, 1)$ am stärksten?

Aufgabe 10 Gegeben sei das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

a) Bestimmen Sie die Gleichung des Tangentialraums an den Graphen von f im Punkt $(1, 0, 1)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f die nachstehende Gleichung[2] erfüllt:

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

Dabei bezeichnet z.B. f_{xx} die zweite partielle Ableitung von f nach x, f_{yy} und f_{zz} analog.

[2]Dies ist eine sogenannte (partielle) Differentialgleichung, da sie Ableitungen einer Funktion miteinander in Beziehung setzt. *Partiell* nennt man sie, da von mehr als einer Variablen abhängt, ansonsten würde man sie als *gewöhnliche* Differentialgleichung bezeichnen; Details dazu im letzten Kapitel 5 dieser Vorlesung.)