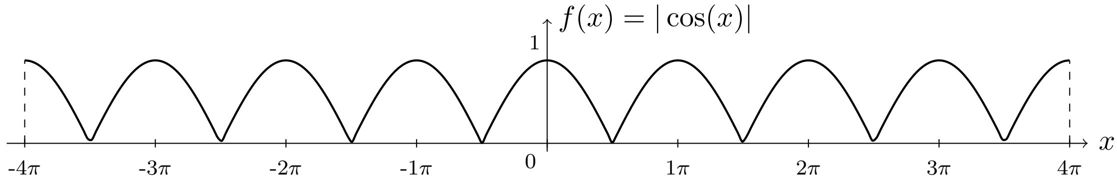
Übungsblatt 4 - Lösungshinweise

Aufgabe 1 Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |\cos(x)|$

a) Die Betragsfunktion führt zu einer Periode $p = \pi$ der Funktion f, d.h. $\omega = 2$.



b) f ist eine gerade Funktion, daher $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$a_n = \frac{4}{p}\int_0^{\frac{p}{2}} f(x)\cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{|\cos(x)|}_{=\cos(x)} \cos(2nx)\,\mathrm{d}x$$

Mit der Identität $(*)$ und $\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$ sowie $\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$ folgt:

$$a_n = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}, \quad \text{insbesondere mit } a_0 = \frac{4}{\pi}$$

Damit erhält man für die Fourier-Reihe

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos(2nx) \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}\cos(2x) - \frac{4}{15\pi}\cos(4\pi) \pm \ldots \end{aligned}$$

c) Da f überall stetig ist, konvergiert ihre Fourier-Reihe überall gegen f selbst, d.h. es gilt $F(x) = f(x) = |\cos(x)|$

d) Es gilt

$$f(0) = 1 = F(0) \overset{\text{c)}}{=} \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}\cdot 1$$

also ergibt sich für den gesuchten Wert der Reihe:

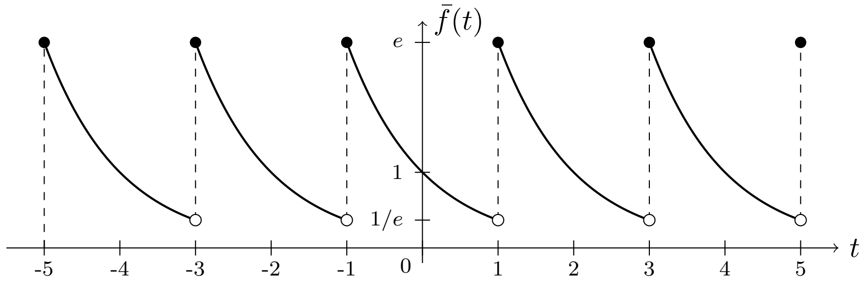
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi-2}{4} \approx 0{,}285$$

Die ersten Terme der Reihe lauten:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \frac{1}{7\cdot 9} \pm \ldots \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} \pm \ldots \end{aligned}$$

Aufgabe 2 Gegeben ist $f(t) = e^{-t}$ für $t \in [-1, 1)$. Gesucht ist die Fourier-Reihe der periodisch fortgesetzten Funktion $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Die Funktion $\bar{f}$ besitzt die Periode $p = 2$, d.h. $\omega = \pi$.



b) Mittels partieller Integration ergeben sich folgende Stammfunktionen („Phönix-Integral"):

$$\int e^{-x}\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-x}}{a^2+1}\left(a\sin(ax) - \cos(ax)\right) + c$$

$$\int e^{-x}\sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{-x}}{a^2+1}\left(a\cos(ax) + \sin(ax)\right) + c$$

Für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten wird als Integrationsintervall $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$ gewählt; das Intervall $[0, p]$ aus der Definition führt zum gleichen Endergebnis. Es gilt:[1]

$$a_n = \frac{p}{2}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} e^{-t}\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n(e^2-1)}{e\cdot(1+n^2\pi^2)} = \frac{(-1)^n\cdot 2\sinh(1)}{1+n^2\pi^2}$$

Es ergibt sich insbesondere $a_0 = 2\sinh(1)$.
Analog ergibt sich mit der zweiten oben angegebenen Stammfunktion:

$$b_n = \frac{p}{2}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} e^{-t}\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n\cdot 2n\pi\sinh(1)}{e\cdot(1+n^2\pi^2)}$$

Für die Fourier-Reihe ergibt sich:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\big) \\ &= 2\sinh(1)\cdot\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\big(\cos(n\pi t) + n\pi\cdot\sin(n\pi t)\big)\right] \end{aligned}$$

c) $\bar{f}$ ist stetig bis auf periodische Unstetigkeitsstellen $U = \{x = 1 + 2n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ mit links- und rechtsseitigen Grenzwerten

$$\lim_{t\to 1^-}\bar{f}(t) = \frac{1}{e} \quad \text{und} \quad \lim_{t\to 1^+}\bar{f}(t) = e$$

[1]Die **Sinus hyperbolicus**-Funktion war definiert als: $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

Für das arithmetische Mittel ergibt sich:[2]

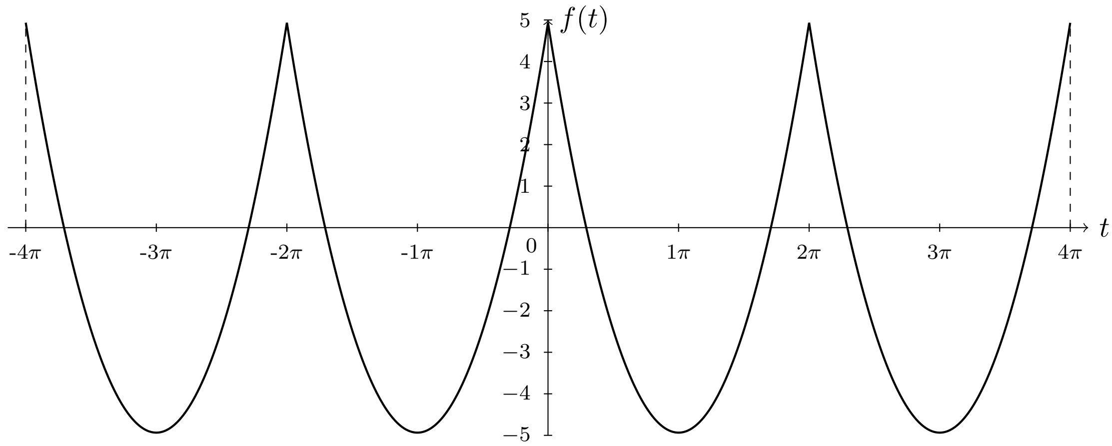
$$m = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 1^-} \bar{f}(t) + \lim_{t\to 1^+} \bar{f}(t)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} + e\right) = \cosh(1)$$

Für die Fourier-Reihe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der periodisch fortgesetzten Funktion $\bar{f}$ gilt also:

$$F(x) = \begin{cases} \bar{f}(t)\,, & \text{falls } t \notin U \\ \cosh(1)\,, & \text{falls } t \in U \end{cases}$$

Aufgabe 3 Gegeben ist die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = (t-\pi)^2 - \frac{1}{2}\pi^2$ für $t \in [0, 2\pi)$.

a) f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, Periode ist $p = 2\pi$, d.h. $\omega = 1$.



b) f ist eine gerade Funktion, daher gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für a_n ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{0}\int_0^{p/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\,\mathrm{d}t - 4\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \pi\int_0^{\pi}\cos(nt)\,\mathrm{d}t =: I_1 - I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Für das erste Integral I_1 ergibt sich mit der angegebenen Stammfunktion

$$\int t^2\cos(at)\,\mathrm{d}t = \frac{2t\cos(at)}{a^2} + \frac{(a^2t^2-2)\sin(at)}{a^3}$$

für $n \neq 0$ der Wert $I_1 = \frac{4}{n^2}(-1)^n$. Für das zweite Integral I_2 ergibt sich mit

$$\int t\cos(at)\,\mathrm{d}t = \frac{\cos(at)}{a^2} + \frac{t\sin(at)}{a}$$

für $n \neq 0$ der Wert $I_2 = \frac{4}{n^2}\big((-1)^n - 1\big)$.

[2]Die **Kosinus hyperbolicus**-Funktion war definiert als: $\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.

Das dritte Integral verschwindet: $I_3 = 0$, sodass sich insgesamt ergibt:

$$a_n = I_1 - I_2 + I_3 = \frac{4}{n^2}$$

Ferner erhält man für $n = 0$ den Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(t^2 + 2\pi t + \frac{\pi^2}{2}\right) \mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{3}$$

Für die Fourier-Reihe der Funktion f ergibt sich schließlich

$$F(t) = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nt)$$

Da f überall stetig ist, wird sie auf ganz $\mathbb{R}$ durch ihre Fourier-Reihe dargestellt: $F(t) = f(t)$.

c) Es gilt

$$f(0) = \frac{\pi^2}{2} \overset{\text{b)}}{=} F(0) = -\frac{\pi^2}{6} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot 1$$

also ergibt sich für den gesuchten Wert der Reihe inverser Quadratzahlen:[3]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,644$$

---

[3]Weiterführend Bemerkungen für interessierte Studierende:

Die Bestimmung des Werts dieser Reihe ist auch als **Basler Problem** bekannt und es gibt eine Vielzahl von unterschiedlichen Möglichkeiten, den Wert von $\frac{\pi^2}{6}$ nachzuweisen. Sie haben hier nun einen eleganten Weg mittels Fourier-Analysis kennengelernt.

Die betrachtete Reihe steht auch im Zusammenhang mit der so genannten **Riemannschen Zeta-Funktion**. Diese Funktion kann als komplexe Reihe für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 1$ definiert werden,

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Die in dieser Aufgabe betrachtete Zahlenreihe ist der Spezialfall $z = 2$ der ζ-Funktion: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Für alle positiven geradzahligen $z \in \mathbb{R}$, d.h. $z = 2, 4, 6, \ldots$, ist der Wert der ζ-Funktion bekannt und lässt sich durch die so genannten **Bernoulli-Zahlen** ausdrücken. Ein weiteres spezielles Ergebnis etwa ist $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ oder $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$, was sich ebenfalls mit Mitteln der Fourier-Analysis „elementar“ zeigen lässt.

Darüber hinaus ist ein berühmtes ungelöstes Problem der Mathematik mit der ζ-Funktion verbunden: Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\zeta(z) = 0$? Dieses Nullstellenproblem ist als **Riemannsche Vermutung** bekannt und dessen Lösung wird als eines der sieben so genannten **Millennium-Probleme** mit einer Million Dollar belohnt. Von dieser Liste exklusiver mathematischer Probleme, die zuletzt im Jahr 2000 aktualisiert wurde, konnte bisher nur die **Poincaré-Vermutung** durch Perelman gelöst werden. Der russische Mathematiker hat allerdings sowohl die Fields-Medaille als auch das Preisgeld für seine Arbeit bis heute abgelehnt.

Schließlich sei noch erwähnt, dass sich mithilfe der ζ-Funktion Aussagen über die Verteilung von Primzahlen tätigen lassen. Der so genannten **Primzahlsatz** beschäftigt sich mit dem Wachstum der Funktion $\pi(x)$, welche die Anzahl der Primzahlen misst, die nicht größer als $x \in \mathbb{R}$ sind. Je nachdem, ob man die Riemannsche Vermutung als wahr erachtet oder nicht, lassen sich strengere oder etwas weniger strengere Aussagen über das Wachstum von $\pi(x)$ für $x \to \infty$ treffen.

Suchen Sie doch ein bisschen nach den Begriffen und Hinweisen dieser Fußnote online oder in der Literatur. Sollten Sie auf einen Beweis der Riemannschen Vermutung stoßen, melden Sie sich gerne direkt bei mir per E-Mail. Dies gilt natürlich auch, wenn zu den angesprochenen Themen einfach nur diskutieren möchten.

Aufgabe 4 Gegeben ist die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin^3(x)$

a) Die Stammfunktion zu $\sin^3(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$ für $n \notin \{\pm 1, \pm 3\}$ erhält man durch Nutzung trigonometrischer Identitäten. In einem ersten Schritt hilft die Identität (**):

$$\begin{aligned}\sin^3(x)\sin(nx) &= \sin^2(x)\cdot\sin(x)\sin(nx)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)\cdot\frac{1}{2}\Big(\cos\big((n-1)x\big)-\cos\big((n+1)x\big)\Big)\end{aligned}$$

In einem zweiten Schritt nutzt man (*), womit sich der Integrand schreiben lässt als:

$$\sin^3(x)\sin(nx) = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\cos\big((n-1)x\big)-\frac{3}{2}\cos\big((n+1)x\big)-\frac{1}{2}\cos\big((n-3)x\big)+\frac{1}{2}\cos\big((n+3)x\big)\right]$$

Hieraus ergibt sich für $\mathbb{N}_0 \ni n \notin \{1, \pm 3\}$ die gesuchte Stammfunktion

$$I_n(x) = \frac{1}{8}\left[\frac{\sin\big((n+3)x\big)}{n+3}-\frac{3\sin\big((n+1)x\big)}{n+1}+\frac{3\sin\big((n-1)x\big)}{n-1}-\frac{\sin\big((n-3)x\big)}{n-3}\right]+c$$

b) Da die Funktion f ungerade ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es ist $p = 2\pi$, also $\omega = 1$. Für die b_n erhält man für $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 3\}$ mithilfe der Stammfunktion aus a):

$$b_n = \frac{4}{p}\int_0^{\frac{p}{2}} f(x)\sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^3(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big[I_n(x)\Big]_0^{\pi} = 0$$

Um die beiden verbleibenden Fourier-Koeffizienten b_1 und b_3 zu bestimmen, betrachtet man zunächst die beiden Grenzwerte

$$\lim_{n\to 1} I_n(x) = \frac{1}{8}\left[\frac{\sin\big(4x\big)}{4}-2\sin\big(2x\big)+3x\right]+c$$

$$\lim_{n\to 3} I_n(x) = \frac{1}{8}\left[\frac{\sin\big(6x\big)}{6}-\frac{3\sin\big(4x\big)}{4}+\frac{3\sin\big(2x\big)}{2}-x\right]+c$$

Die Grenzwerten lassen sich aus $I_n(x)$ für je drei Summanden direkt ausführen, in je einem Summand erhält man das Ergebnis mithilfe von L'Hospital (Typ $\frac{0}{0}$). Es ist wichtig zu beachten, dass der L'Hospital bezüglich n abgeleitet werden muss! Es folgt:

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^3(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big[I_1(x)\Big]_0^{\pi} = \frac{3}{4}$$

$$b_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^3(x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big[I_3(x)\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{4}$$

Zusammen mit $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und den einzigen nicht verschwindenden Koeffizienten b_1 und b_3 ergibt sich als Fourier-Reihe F eine nur endliche Summe:

$$F(x) = b_1\sin(x) + b_3\sin(3x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

Da f überall stetig ist, gilt $f(x) = F(x)$, woraus nachstehende Identität folgt:

$$\sin^3(x) = \frac{1}{4}\big(3\sin(x) - \sin(3x)\big)$$

c) Anstelle der soeben aufwändig durchgeführten Rechnung lässt sich mithilfe der Formel von Moivre

$$\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

Für $n = 3$ erhält man sofort aus dem Imaginärteil der Formel von Moivre:

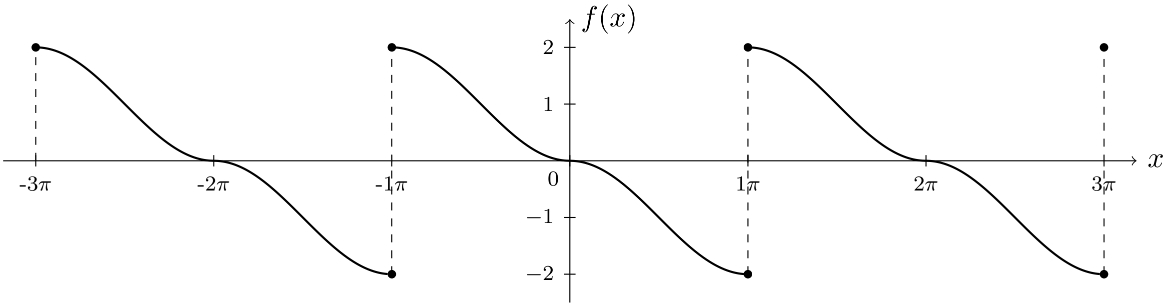
$$\sin^3(x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin(3x)$$

Mit dem trigonometrischem Pythagoras erhält man das gleiche Ergebnis wie zuvor:

$$\sin^3(x) = \frac{1}{4}\big(3\sin(x) - \sin(3x)\big)$$

Aufgabe 5 Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos(x), & -\pi \leq x < 0, \\ \cos(x) - 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

a) Die Funktion f besitzt die Periode $p = 2\pi$, d.h. $\omega = 1$.



b) Da f eine ungerade Funktion ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für die b_n gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{p}\int_0^{\frac{p}{2}} f(x)\sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\bigg(\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x}_{=\frac{1}{n}\left((-1)^n - 1\right)}\bigg) \end{aligned}$$

Mit der Identität $(***)$ ergibt sich für das erste Integral:

$$\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n^2-1}\big((-1)^n + 1\big)$$

Insgesamt lassen sich die beiden Terme zusammenfassen

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1 + (-1)^n(2n^2-1)}{n(n^2-1)}$$

c) Da f bis auf periodische Unstetigkeitsstellen $U = \{x = \pi + 2\pi n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ stetig ist, ergibt sich für die Fourier-Reihe von f:

$$F(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{falls } x \notin U \\ 0\,, & \text{falls } x \in U \end{cases}$$

Das arithmetische Mittel an den Unstetigkeitsstellen ist $0 = \frac{1}{2}\left(f(\pi^-) + f(\pi^+)\right)$.

d) Gesucht ist nun die Taylor-Reihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Es es gilt mit

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

und der Darstellung von f im für $x \in [-\pi, \pi)$ durch die Signum-Funktion $\operatorname{sgn}(\,\cdot\,)$:

$$f(x) = (\cos(x) - 1) \cdot \operatorname{sgn}(x) = (\cos(x) - 1) \cdot \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Damit ergibt sich für die Taylor-Reihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

e) Die Taylor-Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ ($r = \infty$), allerdings nur für $x \in [-\pi, \pi)$ gegen die periodische Funktion $f(x)$. Es gilt:

$$f(\pi) = 2 \neq T(\pi) = -2$$

f) Die Verwendung der Fourier- oder Taylor-Approximation hängt von der Anwendung ab. Folgende Aspekte könnten die Auswahl unterstützen:

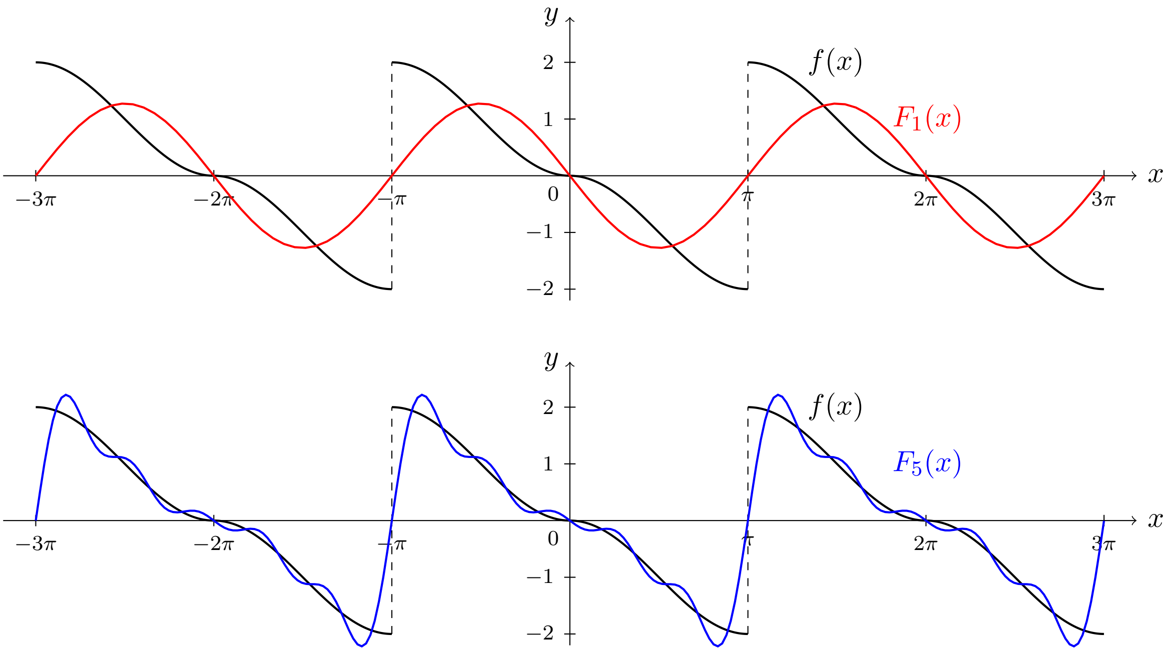
Fourier-Reihe:

- Globale Approximation durch trigonometrische Polynome
- $F(x)$ konvergiert an allen Stetigkeitsstellen gegen die Ausgangsfunktion f
- Gibbs'sches Phänomen („Überschwingung") tritt an allen Unstetigkeitsstellen auf

Taylor-Reihe:

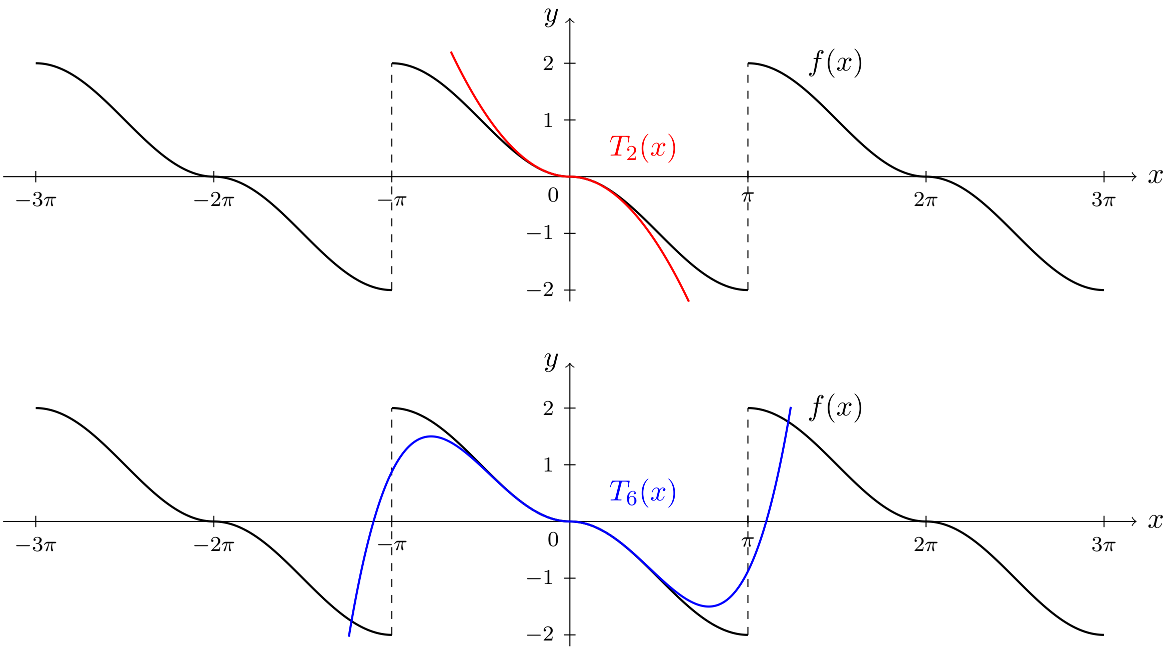
- Lokale Approximation durch Polynome in der Umgebung von $x_0 = 0$.
- $T(x)$ konvergiert nur im Intervall $[-\pi, \pi)$ gegen die Ausgangsfunktion f

Nachstehend zur Illustration und zum Vergleich der Partialsummen $F_1(x)$ und $F_5(x)$ für die Fourier-Approximation sowie $T_2(x)$ und $T_6(x)$ für die Taylor-Approximation.



Fourier-Approximationen $F_1(x)$ und $F_5(x)$ der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos(x)\ , & \text{für } -\pi < x < 0 \\ \cos(x) - 1\ , & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$



Taylor-Approximationen $T_2(x)$ und $T_6(x)$ um $x_0 = 0$ der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos(x)\ , & \text{für } -\pi < x < 0 \\ \cos(x) - 1\ , & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$