Übungsblatt 4

In einigen Aufgaben können Ihnen bekannte trigonometrische Identitäten hilfreich sein:

$$(*) \quad \cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$(**) \quad \sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$(***) \quad \sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

Aufgabe 1 Gegeben sei die reelle Funktion $f(x) = |\cos(x)|$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie die Funktion für $x \in [-4\pi, 4\pi]$. Welche Periodizität $p > 0$ besitzt f?

b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f.
Hinweis: Sie können $(*)$ für die Berechnung der Koeffizienten a_n nutzen.

c) Geben Sie die Funktion F an, gegen welche die Fourier-Reihe konvergiert.

d) Werten Sie F an geeigneter Stelle aus, um den Wert nachstehender Reihe zu bestimmen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \frac{1}{7\cdot 9} \pm \ldots$$

Aufgabe 2 Die Funktion $f(t) = e^{-t}$ mit $t \in [-1, 1)$ werde periodisch zu $\bar{f}$ fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion $\bar{f}$ für $x \in [-5, 5]$.

b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe F von $\bar{f}$.
Hinweis: Die Stammfunktionen $\int e^{-x}\cos(ax)\,\mathrm{d}x$ und $\int e^{-x}\sin(ax)\,\mathrm{d}x$ lassen sich als „Phönix-Integral“ mittels partieller Integration finden.

c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe F?

Aufgabe 3 Gegeben sei die $2\pi-$periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für $t \in [0, 2\pi)$ definiert ist durch die Abbildungsvorschrift $f(t) = (t-\pi)^2 - \frac{\pi^2}{2}$.

a) Skizzieren Sie die Funktion für $x \in [-4\pi, 4\pi]$.

b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe F und begründen Sie, warum $F(x) = f(x)$ gilt.
Hinweis für $a \neq 0$:

$$\int t\cos(at)\,\mathrm{d}t = \frac{\cos(at)}{a^2} + \frac{t\sin(at)}{a}, \quad \int t^2\cos(at)\,\mathrm{d}t = \frac{2t\cos(at)}{a^2} + \frac{(a^2t^2-2)\sin(at)}{a^3}$$

c) Verwenden Sie F, um den Wert der Summe aller inversen Quadratzahlen nachzuweisen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Aufgabe 4 Gesucht ist die Fourier-Reihe von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin^3(x)$.
Es werden in dieser Aufgabe zwei sich stark unterscheidende Lösungswege verfolgt: Zunächst werden die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n direkt aus der Definition heraus berechnet. Als alternative Lösung wird auf die Formel von Moivre zurückgegriffen.

a) Zeigen Sie zunächst für $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1,3\}$, dass die Stammfunktion $I_n(x)$ zu $\sin^3(x)\sin(nx)$ gegeben ist durch

$$\frac{1}{8}\left[\frac{\sin\big((n+3)x\big)}{n+3} - \frac{3\sin\big((n+1)x\big)}{n+1} + \frac{3\sin\big((n-1)x\big)}{n-1} - \frac{\sin\big((n-3)x\big)}{n-3}\right] + c$$

Hinweis: Nutzen Sie $(*)$ *und* $(**)$ *um den Integranden* $\sin^3(x)\sin(nx)$ *als eine Summe aus vier einfach zu integrierenden Summanden zu schreiben.*

b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$, dass die Fourier-Koeffizienten gegeben sind durch $a_n = 0$ sowie

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^3(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{3}{4}, & \text{für } n = 1 \\ -\frac{1}{4}, & \text{für } n = 3 \\ 0, & \text{für alle sonstigen } n \end{cases}$$

Geben Sie nun die Fourier-Darstellung der Funktion $f(x) = \sin^3(x)$ explizit an.

c) Als alternativen - und deutlich kürzeren - Lösungsweg können Sie die Formel von Moivre aus der komplexen Analysis nutzen. Zeigen Sie damit

$$\sin^3(x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin(3x)$$

und schließen Sie auf die Ihnen bereits bekannte Fourier-Darstellung aus Teilaufgabe b).

Aufgabe 5 Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $[-\pi, \pi)$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos(x), & -\pi \le x < 0, \\ \cos(x) - 1, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie $f(x)$ auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.
Hinweis: Sie können $(***)$ *für die Berechnung der Koeffizienten* b_n *nutzen.*

c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe?

d) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von f um $x_0 = 0$.

e) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylor-Reihe? Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylor-Reihe gegen $f(x)$?

f) Wann wäre die Taylor-Entwicklung der Fourier-Entwicklung vorzuziehen? Listen Sie die wesentlichen Unterschiede zwischen der Taylor- und Fourier-Entwicklung auf.