Übungsblatt 3 - Lösungshinweise

Aufgabe 1 Zur Bestimmung des Konvergenzradius kann in allen Teilaufgaben $r = \lim\limits_{(\cdot)\to\infty} \left|\frac{a_{(\cdot)}}{a_{(\cdot)+1}}\right|$ verwendet werden. Der Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ lässt sich direkt aus der Potenzreihe $(x-x_0)^{(\cdot)}$ ablesen. An den Rändern, d.h. für $x = x_0 - r$ und $x = x_0 + r$, sind stets gesonderte Überlegungen anzustellen, um den Konvergenzbereich $K \subset \mathbb{R}$ vollständig festzulegen.

a) $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{2^k}}$ $\Rightarrow x_0 = 0$ und $r = 2$, d.h. die Ränder von K sind $x = \pm 2$.

An beiden Randpunkten ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(\pm 1)^k$ divergent, da keine zugrundeliegende Nullfolge vorliegt (notwendiges Konvergenzkriterium).
Also gilt für den Konvergenzbereich $K = (-2, 2)$.

b) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}}$ $\Rightarrow x_0 = 0$ und $r = 1$, d.h. die Ränder von K sind $x = \pm 1$.

Für $x = -1$ konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ (Leibniz-Kriterium).
Für $x = +1$ konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ebenfalls (Majorantenkriterium und Konvergenz aufgrund des Exponenten $\alpha = 2 > 1$.
Also gilt für den Konvergenzbereich $K = [-1, 1]$.

c) $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{\infty} k(x+3)^k}$ $\Rightarrow x_0 = -3$ und $r = 1$, d.h. die Ränder von K sind $x = -4$ und $x = -2$.

Für $x = -4$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k(-1)^k$ divergent, für $x = -2$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k$ ebenfalls divergent, da in beiden Fällen keine zugrundeliegende Nullfolge vorliegt (notwendiges Konvergenzkriterium).
Also gilt für den Konvergenzbereich $K = (-4, -2)$.

d) $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n}$ $\Rightarrow x_0 = 0$ und $r = 0$, d.h. die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$ (mit Wert 1, da $0^0 = 1$ und $0! = 1$). Also gilt für den Konvergenzbereich $K = \{0\}$.

e) $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k^2 + 2^k)x^k}$ $\Rightarrow x_0 = 0$ und $r = \frac{1}{2}$, d.h. die Ränder von K sind $x = -\frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{2}$.

Für $x = \pm\frac{1}{2}$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k^2 + 2^k)\Big(\pm\frac{1}{2}\Big)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{k^2}{(\pm 2)^k} + (\pm 1)^k\Big)$ divergent, da keine zugrundeliegende Nullfolge vorliegt (notwendiges Konvergenzkriterium).
Also gilt für den Konvergenzbereich $K = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

f) $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)x^n}$ $\Rightarrow x_0 = 0$ und $r = 3$, d.h. die Ränder von K sind $x = \pm 3$.

Für $x = \pm 3$ ist $\sum_{n=0}^{\infty}\left((\pm 1)^n + \left(\pm\frac{3}{5}\right)^n\right)$ divergent, da keine zugrundeliegende Nullfolge vorliegt (notwendiges Konvergenzkriterium).
Also gilt für den Konvergenzbereich $K = (-3, 3)$.

g) $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+1)^k}{k^2}}$ $\Rightarrow x_0 = -1$ und $r = 1$, d.h. die Ränder von K sind $x = -2$ und $x = 0$.

Für $x = -2$ ist $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$ konvergent (Leibniz-Kriterium).
Für $x = 0$ ist $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ ebenfalls konvergent aufgrund des Exponenten $\alpha = 2 > 1$.
Also gilt für den Konvergenzbereich $K = [-2, 0]$.

h) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}(x-4)^n}$ $\Rightarrow x_0 = 4$ und $r = e$, d.h. die Ränder von K sind $x = 4 \pm e$.

Für $x = 4 \pm e$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}(\pm e)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ divergent, da da keine zugrundeliegende Nullfolge vorliegt (notwendiges Konvergenzkriterium).
Also gilt für den Konvergenzbereich $K = (4-e, 4+e) \approx (1,28; 6,72)$.

i) $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{k!}(x-1)^k}$ $\Rightarrow x_0 = 1$ und $r = \infty$. Also gilt für den Konvergenzbereich $K = \mathbb{R}$, für den es keine Ränder zu betrachten gibt.

Aufgabe 2 Die Reihen in den nachstehenden Teilaufgaben können allesamt auf die Form einer geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ gebracht werden. Konvergenz liegt für $|q| < 1$ vor. Daraus ergibt sich der maximale Definitionsbereich der durch die Potenzreihe definierten Funktion.

a) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2x^{2k+1} = 2x\sum_{k=0}^{\infty}(x^2)^k = \frac{2x}{1-x^2}$, falls $|q| = x^2 < 1$ ist, also $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$.
Es ist dabei wichtig zu beachten, dass, obwohl z.B. $x = 2$ in $\left.\frac{2x}{1-x^2}\right|_{x=2} = -\frac{4}{3}$ formal eingesetzt werden kann, die über die Potenzreihe definierte Funktion f an der Stelle $x = 2$ nicht definiert ist.
Grund: Für $x = 2$ lauten die definierende Reihe: $f(2) = 4 \cdot (1 + 4 + 16 + 64 + \ldots)$, was offensichtlich divergiert. Die Bedingung $|q| = x^2 < 1$ für Konvergenz der geometrischen Reihe ist zu beachten!

b) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 16^k (x+3)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(16(x+3)^2\right)^k = \dfrac{1}{1-16(x+3)^2} = -\dfrac{1}{16x^2+96x+143}$,
falls $|q| = 16(x+3)^2 < 1$, d.h. $|x+3| < \frac{1}{4}$, also $f : (2,75; 3,25) \to \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k+1} = x^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = x^2 \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = x^2 \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$,
falls $|q| = |x| < 1$, also $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$

Aufgabe 3 MacLaurin-Reihe für $\exp(x)$ und $\ln(1+x)$

a) $f(x) = e^x$, d.h. für die Ableitungen gilt: $f^{(n)}(x) = e^x$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
Für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ folgt $f^{(n)}(0) = 1$, also

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

Es ist $r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$, d.h. $K = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \ln(1+x)$, d.h. für die Ableitungen gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\ , \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\ , \quad f'''(x) = \frac{+2}{(1+x)^3}\ , \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

$$\ldots \quad \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

Für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ folgt $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ für $n \geq 1$ und $f(0) = 0$ für $n = 0$, also

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \mp \ldots$$

Es ist $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$.

Aufgabe 4 Unter Nutzung der bisher bekannten Reihen und Taylor-Reihen lassen sich nachstehende Ausdrücke direkt (und vergleichsweise einfach) auswerten:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} = \left.\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} x^k \right|_{x=1} = e^x|_{x=1} = e \quad$ ($r = \infty$, d.h. K ohne Rand)

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad$ (geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$; $r = 1$, d.h. nicht am Rand)

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2^k} = \dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{3}{2} \quad$ (geometrische Reihe mit $q = -\frac{1}{2}$; nicht am Rand)

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \bigg|_{x=1} = -\ln(1+x)|_{x=1} = -\ln(2)$
(Auswertung am Rand; Konvergenz folgt aus dem Leibniz-Kriteriums)

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 42)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \bigg|_{x=\ln 42} = e^{\ln 42} = 42 \quad (r=\infty, \text{ d.h. } K \text{ ohne Rand})$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \pi^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \bigg|_{x=-\pi} = e^{-\pi} \approx 0,043 \quad (r=\infty, \text{ d.h. } K \text{ ohne Rand})$

Aufgabe 5 In allen Teilaufgaben ist nach Taylor-Reihen um einen gegebenen Entwicklungspunkt gefragt. Manche Lösungen basieren auf einer Rechnung „zu Fuß“, d.h. mittels Berechnung von n-ten Ableitungen direkt ausgehend von der Definition einer Taylor-Reihe. In vielen Teilaufgaben jedoch wird die gesuchte Taylor-Reihe auf eine andere, bereits bekannte Taylor-Reihe zurückgeführt. Selbstverständlich ließe sich auch in diesen Fällen das Ergebnis direkt von der Definition ausgehend berechnen.

a) $f(x) = \ln(x)$ um Entwicklungspunkt $x_0 = 1$, d.h. $f(x_0) = f(1) = \ln(1)$. Es gilt:

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} y^n$$

mit Konvergenzradius $r = 1$, d.h. $y \in (-1, 1)$ möglich. Für $x = 1 + y$ folgt:

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$$

mit Konvergenzradius $r = 1$, also $x \in (0, 2)$.

b) $f(x) = \ln(2x + 3)$ um Entwicklungspunkt $x_0 = -1$, d.h. $f(x_0) = f(-1) = \ln(1)$. Es gilt:

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} y^n$$

mit Konvergenzradius $r = 1$, d.h. $y \in (-1, 1)$ möglich. Für $1+y = 2x+3$, d.h. $y = 2x+2$ bzw. $x = \frac{1}{2}(y-2)$ folgt:

$$\ln(2x+3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (2x+2)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} (x+1)^n$$

mit Konvergenzradius $r = \frac{1}{2}$, also $x \in (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

c) $f(x) = \sin(x)$ um Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Gemäß Definition der Taylor-Reihe sind die Ableitungen am Entwicklungspunkt zu bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x) &= f^{(4)}(x) = \ldots = \sin(x) \\ f'(x) &= f^{(5)}(x) = \ldots = \cos(x) \\ f''(x) &= f^{(6)}(x) = \ldots = -\sin(x) \\ f'''(x) &= f^{(7)}(x) = \ldots = -\cos(x) \end{aligned}$$

Damit erhält man am Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$a_k = f^{(k)}(x_0 = \tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 1 & \text{falls } k = 0, 4, 8, 12, \dots \\ -1 & \text{falls } k = 2, 6, 10, 14, \dots \end{cases}$$

Damit folgt für die Taylor-Reihe (Konvergenzradius ist $r = \infty$):

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= 1 - \frac{1}{2!}(x - \tfrac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x - \tfrac{\pi}{2})^4 \pm \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - \tfrac{\pi}{2})^k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!}(x - \tfrac{\pi}{2})^{2l} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wird bei der Summe über die Indizes l verwendet, dass $a_k = 0$ gilt, falls k ungerade ist.

Beobachtung: Das Ergebnis erinnert an die Reihendarstellung des Kosinus! In der Tat erhält man aus der Identität $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$:

$$T(x) = \sin(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!}(x - \tfrac{\pi}{2})^{2l}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(x + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l} \quad \checkmark$$

d) $f(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$ um Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Wir kennen bereits die MacLaurin-Reihe von $\cos(x)$, daher erhalten wir direkt:

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} - 1\right) = \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2(k-1)} \quad (\to \text{Indexshift}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} x^{2k} = -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^4}{6!} \pm \dots \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist $r = \infty$.

e) $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2}$ um Entwicklungspunkt $x_0 = 3$. Gemäß Definition der Taylor-Reihe sind die Ableitungen am Entwicklungspunkt zu bestimmen:

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-5)^3}\,, \quad f''(x) = \frac{+6}{(x-5)^4}\,, \quad f'''(x) = \frac{-24}{(x-5)^5}$$

$$\ldots \quad \Rightarrow f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k(k+1)!}{(x-5)^{k+2}}$$

Damit erhält man am Entwicklungspunkt $x_0 = 3$: $f^{(k)}(3) = \dfrac{(-1)^k(k+1)!}{4\cdot(-2)^k} = \dfrac{(k+1)!}{4\cdot 2^k}$ und es folgt für die Taylor-Reihe:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4\cdot 2^k}(x-3)^k$$

Der Konvergenzradius ergibt sich zu $r = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{a_{k+1}} = 2$.

f) $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ um Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Wir kennen bereits die MacLaurin-Reihe der Exponentialfunktion, daher

$$T(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot \underbrace{\left(x^k + (-x)^k\right)}_{=\begin{cases} 0 & ,\ k \text{ ungerade} \\ 2x^k & ,\ k \text{ gerade}\end{cases}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l)!}x^{2l}$$

Der Konvergenzradius ist $r = \infty$.

g) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ um Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Gemäß Definition der Taylor-Reihe sind die Ableitungen am Entwicklungspunkt zu bestimmen:

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} \qquad f''(x) = \frac{(-2)(-2)}{(1+x)^3)}\ , \quad f'''(x) = \frac{(-2)(-2)(-3)}{(1+x)^4}$$

$$\ldots \quad \Rightarrow f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\cdot 2\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$$

Damit erhält man am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$: $f^{(k)}(0) = 2(-1)^k\cdot k!$ für $k \geq 1$ und $f(0) = 1$ für $k = 0$, also:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2(-x)^k$$

Der Konvergenzradius ist $r = 1$.

h) $f(x) = \dfrac{23-7x}{12-7x+x^2}$ um Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ lässt sich zunächst mittels Partialbruchzerlegung wie folgt als Summe schreiben:

$$f(x) = \frac{2}{3-x} + \frac{5}{4-x}$$

Für allgemeines $a \neq 0$ ist es hilfreich die MacLaurin-Reihe zu $\dfrac{1}{a-x}$ zu untersuchen. Es gilt:

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^k$$

unter Verwendung der geometrischen Reihe für $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, d.h. für $|x| = |a|$, also $r = |a|$. Damit folgt für die MacLaurin-Reihe von f:

$$T(x) = 2 \cdot \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k + 5 \cdot \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^{k+1}} + \frac{5}{4^{k+1}}\right)x^k$$

Der Konvergenzradius des ersten Summanden beträgt $r_1 = 3$, der des zweiten Summanden beträgt $r_2 = 4$. Aus den Rechenregeln für die Summe von Potenzreihen folgt der Konvergenzradius $r = \min(r_1, r_2) = 3$.

Aufgabe 6 Zur Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 8$ lautet das Taylor-Polynom dritter Ordnung:

$$T_3(x) = 2 + \frac{x-8}{12} - \frac{(x-8)^2}{2! \cdot 144} + \frac{5(x-8)^3}{3! \cdot 3456}$$

Für das Restglied gilt nach dem Satz von Taylor:

$$|R_2(x)| = |f(x) - T_2(x)| = \frac{|f^{(3)}(z)|}{3!} \cdot |x-8|^3 \quad \text{für ein } z \in [7, 9]$$

Es ist $f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$ eine monoton fallende Funktion in x, d.h. sie erreicht ihr Maximum für $x \in [7, 9]$ am linken Rand bei $x = 7$. Damit gilt die Abschätzung für $x \in [7, 9]$:

$$|R_2(x)| \le \frac{|f^{(3)}(7)|}{3!} \cdot |7-8|^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{7^8}} \approx 3,4 \cdot 10^{-4}$$

Das Taylor-Polynom $T_2(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 8$ approximiert die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ im Bereich $x \in [7, 9]$ also bis auf einen maximalen Fehler von $3,4 \cdot 10^{-4}$.

Aufgabe 7 MacLaurin-Reihe für $f(x) = \arctan(x)$

Diese Reihe ergibt sich aus Entwicklung ihrer Ableitung und anschließender Integration:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \quad \text{für } |x| < 1$$

Diese Darstellung nutzt die geometrische Reihe für $|q| = |x^2| < 1$, also $|x| < 1$. Es folgt:

$$f(x) = \arctan(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\int(-1)^k x^{2k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} \pm \dots$$

Die Integrationskonstante verschwindet, da $\arctan(0) = 0$ gelten muss.

Es gilt für den Konvergenzradius $r = 1$ und für den Konvergenzbereich $K = (-1, 1]$. Die Konvergenz der Potenzreihe für $x = 1$ folgt aus dem Leibniz-Kriterium.

Da $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ gilt, folgt:

$$\pi = 4 \cdot \arctan(1) = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots\right)$$

Aufgabe 8 Betrachte im Folgenden die Funktion $f(x) = \operatorname{sinc}(x) := \dfrac{\sin(x)}{x}$:

a) Der maximale Definitionsbereich von f ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) Es gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1$, d.h. f kann auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto g(x) = \begin{cases} f(x) = \operatorname{sinc}(x) & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

c) Die MacLaurin-Reihe des Sinus ist bekannt, also folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{sinc}(x) &= \frac{1}{x}\sin(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \pm \ldots \end{aligned}$$

d) Die Näherungen I_2 und I_4 an das gesuchte Integral $I = \int_0^{\pi} \operatorname{sinc}(x)\,\mathrm{d}x$ lauten:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi} T_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)\mathrm{d}x = \pi\left(1 - \frac{\pi^2}{18}\right) \approx 1{,}4190 \\ I_4 &= \int_0^{\pi} T_4(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)\mathrm{d}x = \pi\left(1 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^4}{600}\right) \approx 1{,}9291 \end{aligned}$$

Zum wahren Ergebnis $I = 1{,}8519\ldots$ liefert I_2 eine Abschätzung mit relativ großer Abweichung, I_4 bereits eine sehr gute Abschätzung:

$$\frac{I_2 - I}{I} \approx -23{,}38\% \;, \qquad \frac{I_4 - I}{I} \approx 4{,}16\%$$

Weiterführende Bemerkung

Für die nächsten beiden Näherungen I_6 und I_8 ergeben sich weitere Verbesserungen:

$$\frac{I_6 - I}{I} \approx -0{,}46\% \;, \qquad \frac{I_8 - I}{I} \approx 0{,}03\%$$