Übungsblatt 3

Aufgabe 1 Bestimmen Sie den Konvergenzbereich $K \subset \mathbb{R}$ der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{2^k}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$ e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k^2+2^k)x^k$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}(x-4)^n$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k(x+3)^k$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right) x^n$ i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!}(x-1)^k$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und anschließend den Konvergenzradius $r \geq 0$. Was passiert an den Rändern des Konvergenzbereichs?

Aufgabe 2 Durch nachstehende Potenzreihen werden je eine reelle Funktion f definiert. Bestimmen Sie eine explizite Form dieser Funktionen und geben Sie den durch die Potenzreihe festgelegten maximalen Definitionsbereich an.

a) $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2x^{2k+1}$ b) $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 16^k(x+3)^{2k}$ c) $\displaystyle f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k+1}$

Hinweis: Sie können für $|q| < 1$ die geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ verwenden.

Aufgabe 3 Weisen Sie die nachstehenden MacLaurin-Reihen für die Exponentialfunktion sowie den natürlichen Logarithmus nach. Bestimmen Sie auch die Konvergenzradien.

a) $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ b) $\displaystyle \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$

Aufgabe 4 Nutzen Sie Ihnen bekannte Reihen oder Potenzreihenentwicklungen von Funktionen, um die Werte der nachstehenden konvergenten Ausdrücke zu bestimmen[1]:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 42)^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\pi^k$

Hinweis: Überlegen Sie bei Ihrer Rechnung, ob Sie sich innerhalb oder am Rand des Konvergenzbereichs befinden. Falls Sie sich am Rand befinden, warum gilt dort Konvergenz?

[1] Sie werden insbesondere e und $-\ln(2)$ erhalten, wie es Ihnen in der Vorlesung versprochen wurde.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie die Taylor-Reihen der nachstehenden Funktionen um den jeweils angegeben Entwicklungspunkt x_0 sowie die Konvergenzradien der Reihen:

a) $f(x) = \ln(x),\ x_0 = 1$

b) $f(x) = \ln(2x+3),\ x_0 = -1$

c) $f(x) = \sin(x),\ x_0 = \frac{\pi}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{\cos(x)-1}{x^2},\ x_0 = 0$

e) $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2},\ x_0 = 3$

f) $f(x) = \cosh(x),\ x_0 = 0$

g) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x},\ x_0 = 0$

h) $f(x) = \dfrac{23-7x}{12-7x+x^2},\ x_0 = 3$

Hinweis: Überlegen Sie, ob sich einige Taylor-Reihen auf Ihnen bekannte Reihen zurückführen lassen. Direkt von der Definition zu starten kann in manchen Fällen sehr aufwändig sein. Bei der letzten Teilaufgabe ist eine Partialbruchzerlegung sowie eine allgemeine Betrachtung der MacLaurin-Reihe von $\frac{1}{a-x}$ *für* $a \neq 0$ *hilfreich.*

Aufgabe 6 Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritter Ordnung von $f(x) = \sqrt[3]{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 8$ und schätzen Sie den Approximationsfehler $|f(x) - T_2 f(x)|$ für $x \in [7, 9]$ mit Hilfe des Satzes von Taylor ab.

Aufgabe 7 Bestimmen Sie die MacLaurin-Reihe von $f(x) = \arctan(x)$. Nutzen Sie das Ergebnis geschickt, um eine Reihendarstellung für π zu erhalten. Überlegen Sie insbesondere, warum die Reihe am Rand des Konvergenzbereichs ($r = 1$) konvergiert.

Aufgabe 8 Betrachten Sie die reelle Funktion $f(x) = \operatorname{sinc}(x) := \dfrac{\sin(x)}{x}$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f an.

b) Kann f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig fortgesetzt werden? Falls ja, geben Sie die Fortsetzung g an.

c) Bestimmen Sie die MacLaurin-Reihe von g.
Hinweis: Die Bestimmung über explizites Ableiten der Funktion ist sehr aufwändig. Überlegen Sie stattdessen, wie Sie die Reihenentwicklung auf eine bereits bekannte MacLaurin-Reihe zurückführen können. Die ersten drei Terme des Ergebnisses lauten: $1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4$

d) Für die sinc-Funktion ist nicht möglich, eine analytische Stammfunktion[2] zu bestimmen. Nutzen Sie daher die Taylor-Approximation zweiter sowie vierter Ordnung, $T_2(x)$ bzw. $T_4(x)$, um nachstehendes Integral näherungsweise zu bestimmen:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

Analysieren Sie die Ergebnisse im Hinblick auf das wahre Ergebnis $I = 1{,}8519\ldots$

[2]Eine analytische Stammfunktion liegt vor, wenn sie sich durch elementare Funktion wie Polynome, Sinus, Kosinus, Wurzeln, Logarithmen etc. darstellen lässt. Für $\int \operatorname{sinc}(x)\,\mathrm{d}x$ ist dies nicht der Fall.