Übungsblatt 2 - Lösungshinweise

Aufgabe 1 *Hinweis: Die vorgeschlagene Anwendung des z.B Quotientenkriteriums schließt nicht aus, dass auch andere Kriterien zu dem selben Ergebnis führen können.*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k^3}{k!}$ ist konvergent nach dem Quotientenkriterium: $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+3n^2-2n}{5n^2+2}\right)^n$ ist konvergent nach dem Wurzelkriterium: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{5}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+3n^2-2n}{5n^2+2}$ ist divergent, da zugrunde liegende Folge keine Nullfolge: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{5}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(-3)^k}$ ist konvergent nach dem Leibniz-Kriterium: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+1}{3^k} = 0$ (Monotonienachweis z.B. durch negative Ableitung der auf $\mathbb{R}^+$ fortgesetzten Funktion $x \mapsto \frac{x+1}{3^x}$)

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}$ ist konvergent nach dem Quotientenkriterium: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{k}}{k}$ ist divergent nach dem Minorantenkriterium: $\frac{1+\sqrt{k}}{k} > \frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}}$, deren zugehörige Reihe divergiert (Exponent des Nenners ist $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1+\sqrt{k}}{k}$ ist konvergent nach dem Leibniz-Kriterium: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1+\sqrt{k}}{k} = 0$ (Monotonienachweis z.B. durch negative Ableitung der auf $\mathbb{R}^+$ fortgesetzten Funktion $x \mapsto \frac{1+\sqrt{x}}{x}$)

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n$ ist konvergent nach dem Wurzelkriterium: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$ ist divergent, da zugrunde liegende Folge keine Nullfolge sondern unbestimmt divergent ist. Die Folge der Partialsummen lautet: $(-\frac{1}{2}, -1, 0, -\frac{1}{2}, -1, 0, -\frac{1}{2}, \ldots)$. Die Reihe ist also unbestimmt divergent.

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{3n^2+7}$ ist divergent nach dem Minorantenkriterium, denn $3n^2+7 < 5n^2$ für $n \geq 2$. Damit folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{3n^2+7} = \frac{5}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n}{3n^2+7} > \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{5n^2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

aufgrund der divergenten harmonischen Reihe, die hier ab $n = 2$ auftritt.

Aufgabe 2 Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Also ergibt sich für die n-te Partialsumme (Teleskopsumme):

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + 0 + 0 + \ldots + 0 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Wert der Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

Aufgabe 3

a) Es gilt mit den Rechengesetzen für die Exponentialfunktion und der geometrischen Summenformel für $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P_N(q) &= \prod_{k=1}^{N} \exp\left(\frac{q-1}{q^k}\right) = \exp\left[\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{q-1}{q^k}\right)\right] \\ &= \exp\left[(q-1)\left(\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{q}\right)^k - 1\right)\right] \\ &= \exp\left[(q-1) \cdot \left(\frac{1 - q^{-(N+1)}}{1 - \frac{1}{q}} - 1\right)\right] = \exp\left[1 - q^{-N}\right] \end{aligned}$$

b) Für $P(q) = \lim_{N\to\infty} P_N(q)$ sind vier Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $0 < q < 1 \;\Rightarrow\; q^{-N} \to \infty$ für $N \to \infty$

Fall 2: $q = 1 \;\Rightarrow\; q^{-N} = 1$

Fall 3: $|q| > 1 \;\Rightarrow\; q^{-N} \to 0$ für $N \to \infty$

Fall 4: $-1 \leq q < 0 \;\Rightarrow\; q^{-N}$ ist unbestimmt divergent für $N \to \infty$

Damit folgt:

$$P(q) = \lim_{N\to\infty} P_N(q) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < q < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ e & \text{für } |q| > 1 \\ \text{unbestimmt divergent} & \text{für } -1 \leq q < 0 \end{cases}$$