Übungsblatt 2

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k^3}{k!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+3n^2-2n}{5n^2+2}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+3n^2-2n}{5n^2+2}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(-3)^k}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{k}}{k}$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1+\sqrt{k}}{k}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{3n^2+7}$

Aufgabe 2 Zerlegen Sie die Reihenglieder von

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

mit Hilfe der Partialbruchzerlegung und ermitteln Sie damit einen expliziten Ausdruck für die n-te Partialsumme der Reihe. Was ist der Wert der Reihe?

Bemerkung: Nutzen Sie die bei dieser Reihe auftretende „Teleskopsumme“.

Aufgabe 3 Betrachten Sie für $q \neq 0$ das Produkt

$$P_N(q) = \prod_{k=1}^{N} \exp\left(\frac{q-1}{q^k}\right)$$

a) Wie lautet für allgemeines $N \in \mathbb{N}$ das Ergebnis von $P_N(q)$?

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $q \neq 0$ den Grenzwert $P(q) = \lim\limits_{N\to\infty} P_N(q)$.
Hinweis: Für den Grenzwert sind vier Fälle für q zu unterscheiden. In einem dieser Fälle liegt eine unbestimmte Divergenz vor.