Übungsblatt 1 - Lösungshinweise

Aufgabe 1 Durch Integration $s(t) = \int_0^t v(\tau)\ \mathrm{d}\tau$ ergibt sich aus $v(\tau) = \dfrac{a\tau^2}{b+\tau^3}$:

$$s(t) = \frac{a}{3}\left(\ln\left(b+t^3\right) - \ln(b)\right) = \frac{a}{3}\ln\left(1+\frac{t^3}{b}\right)$$

mit der Anfangsbedingung $s(0) = 0$

Aufgabe 2 Aus der konstanten Beschleunigung $a = -2\,\mathrm{m/s^2}$ folgt aus den Bewegungsgleichungen $a(t) = a = \dot{v}(t)$ und $v(t) = \dot{s}(t)$:

$$\begin{aligned} v(t) &= at + v_0 \quad \text{mit } v_0 = v(0) = 30\,\mathrm{m/s} \\ s(t) &= \frac{a}{2}t^2 + v_0 t \quad \text{mit } s_0 = s(0) = 0\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Das Fahrzeug kommt nach der Zeit T zum Stillstand: $v(T) \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = -\dfrac{v_0}{a} = 15\,\mathrm{s}$. In dieser Zeit hat das Fahrzeug die Strecke $\left. s(T)\right|_{T=15\,\mathrm{s}} = 225\,\mathrm{m}$ zurückgelegt.

Aufgabe 3 Der mittlere Funktionswert $\overline{y}$ von $y(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ im Intervall $I = [-1, 1]$ ist

$$\overline{y} = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left[\arctan(x)\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$$

Aufgabe 4 Wegen der Punktsymmetrie der Sinusfunktion verschwindet der lineare Mittelwert der Funktion: $m = 0$
Für den quadratischen Mittelwert gilt:

$$q = \sqrt{\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}\sin^2\left(\frac{\pi x}{c}\right)\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dabei wurde die Substitution $y = \dfrac{\pi x}{c}$ sowie die Stammfunktion aus dem Hinweis genutzt.

Aufgabe 5 Für die zweite Hälfte der Periode $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ fällt der Strom auf 0 ab, weshalb sich die Integration bei der Berechnung der Mittelwerte auf die erste Hälfte beschränkt:

$$\overline{I} = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t = \frac{I_0}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{I_0}{\pi}$$

Ferner gilt:

$$I_{\text{eff}} = \left(\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_0^2\sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{I_0^2}{T}\cdot\frac{\pi}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{I_0}{2}$$

Dabei wurde die Substitution $y = \omega t$ sowie die aus der vorherigen Aufgabe bekannte Stammfunktion genutzt:

$$\int \sin^2(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(y - \cos(y)\sin(y)\right) + c$$

Aufgabe 6 Es gilt

$$L = \int_0^T \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^T \sqrt{1 + \frac{9x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{2}T\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

Die Bogenlänge $L = 148$ ergibt sich also für $T = 22$.

Aufgabe 7 Aus den Ableitungen der einzelnen Komponenten ergibt sich:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{4\pi} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{2 + t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Mit der Substitition $x = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ und Stammfunktion

$$\int \sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(x \cdot \sqrt{1 + x^2} + \operatorname{arsinh}(x)\Big) + c$$

aus der Vorlesung ergibt sich:

$$L = 2\pi\sqrt{2 + 16\pi^2} + \operatorname{arsinh}(2\sqrt{2}\pi) \approx 82,3$$

Aufgabe 8 Für die Koordinaten des Schwerpunkts gilt mit $f(x) = \dfrac{4}{4 + x^2} > 0$

$$x_s = \frac{1}{N}\int_{-2}^{2} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad y_s = \frac{1}{2N}\int_{-2}^{2} (f(x))^2\,\mathrm{d}x \quad \text{mit Nenner } N = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Der Integrand $x \cdot f(x) = \dfrac{4x}{4 + x^2}$ der x-Komponente x_s ist eine ungerade Funktion, die über ein zum Ursprung symmetrisches Intervall integriert wird. Daher gilt: $x_s = 0$.
Für den Nenner N gilt:

$$N = \int_{-2}^{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = 2\left[\arctan(y)\right]_{-1}^{1} = \pi$$

Dabei wurde die Substitution $y = \dfrac{x}{2}$ mit $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}y$ verwendet.
Für die y-Komponente ergibt sich zusammen mit dem Hinweis ($a = 2$):

$$y_s = \frac{1}{2N}\int_{-2}^{2}(f(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{16}{2\pi}\int_{-2}^{2}\frac{1}{(4+x^2)^2} = \frac{16}{2\pi}\left[\frac{x}{8\cdot(4+x^2)} + \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2+\pi}{4\pi} \approx 0,41$$

Abschließend lässt sich die Korrektheit der im Hinweis angegebenen Stammfunktion durch Ableiten (Quotientenregel und Kettenregel) verifizieren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \frac{2a^2(a^2+x^2) - x\cdot 2a^2\cdot 2x}{4a^4(a^2+x^2)^2} + \frac{1}{2a^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a}$$
$$= \frac{a^2+x^2-2x^2}{2a^2(a^2+x^2)^2} + \frac{1}{2a^2(a^2+x^2)}$$
$$= \frac{a^2+x^2-2x^2+(a^2+x^2)}{2a^2(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{(a^2+x^2)^2} \quad \checkmark$$

Aufgabe 9 Die von der Geraden $f(x) = x+2$ und Parabel $g(x) = x^2-4$ berandete Fläche wird durch die Punkte $(x_1, 0)$ und $(x_2, 5)$ mit $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ begrenzt. In diesem Intervall $I = [-2, 3]$ gilt $f(x) - g(x) = 6 + x - x^2 \geq 0$. Die x-Komponente berechnet sich als:

$$x_s = \frac{1}{N}\int_{-2}^{3} x\cdot\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit Nenner } N = \int_{-2}^{3}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$$

Es gilt für den Nenner:

$$N = \int_{-2}^{3}(6+x-x^2)\,\mathrm{d}x = \left[6x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{3} = \frac{125}{6}$$

Damit ergibt sich für die x-Komponente des Schwerpunkts:

$$x_s = \frac{6}{125}\int_{-2}^{3}(6x+x^2-x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{6}{125}\left[3x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{3} = \frac{1}{2}$$

Für die y-Komponente gilt:

$$y_s = \frac{1}{2N}\int_{-2}^{3}\big((f(x))^2 - (g(x))^2\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2N}\int_{-2}^{3}\big(-x^4+9x^2+4x-12\big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2N}\underbrace{\left[-\frac{1}{5}x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 12x\right]_{-2}^{3}}_{=0} = 0$$

Aufgabe 10 Es gilt $f(x) - g(x) = 0$ für $x \in \{0, 4\}$. Für $0 \leq x \leq 4$ gilt $f(x) \geq g(x)$, also

$$A = \int_{0}^{4}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \frac{32}{15}$$

Ferner gilt $L = L_f + L_g =$ mit

$$L_f = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\ \mathrm{d}x = \frac{8}{17}\left(10\sqrt{10}-1\right) \approx 9,07$$

$$L_g = \int_0^4 \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{17}+\operatorname{arsinh}(4)\right) \approx 9,29$$

Aufgabe 11 Die Periodenlänge ist $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und

$$U_{\mathrm{eff}}^2 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} U_0^2\left(\cos^4(\omega t) - \cos^2(\omega t) + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t$$

Die Stammfunktionen von $\cos^4(\omega t)$ und $\cos^2(\omega t)$ tragen nur durch die Auswertung ihrer oberen Grenze zum Integral bei. Die konstante Funktion $\frac{1}{4}$ lässt sich direkt zu $\frac{1}{4}x$ integrieren. Insgesamt ergibt sich $U_{\mathrm{eff}}^2 = \frac{U_0^2}{8}$ und als Effektivwert der Wechselspannung $U_{\mathrm{eff}} = \frac{U_0}{2\sqrt{2}}$.