Übungsblatt 1

Aufgabe 1 Das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz einer Bewegung lautet

$$v(t) = \frac{at^2}{b+t^3} \quad (t \geq 0)$$

mit gegebenen Parametern $a, b > 0$. Bestimmen Sie das Weg-Zeit-Gesetz $s(t)$ zur Anfangsbedingung $s(0) = 0$.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie das Weg-Zeit-Gesetz $s(t)$ sowie das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz $v(t)$ eines Fahrzeugs für den Fall eines Bremsvorgangs mit einer konstanten Bremsverzögerung (negative Beschleunigung) $a = -2\,\mathrm{m/s}^2$ bei gegebenen Anfangswerten

$$s(0) = 0\,\mathrm{m} \quad \text{sowie} \quad v(0) = 30\,\mathrm{m/s}\ .$$

Nach welcher Zeit kommt das Fahrzeug zum Stillstand? Welche Strecke hat es während des Bremsvorgangs zurückgelegt?

Aufgabe 3 Welche mittlere Ordinate $\bar{y}$ hat die Funktion $y(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ im Intervall $[-1, 1]$?

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass sowohl der lineare Mittelwert m als auch der quadratische Mittelwert q der Funktion $f : [-c, c] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{c}\right)$ unabhängig von $c > 0$ ist.
Hinweis: Mittels partieller Integration kann nachstehende Stammfunktion gefunden werden:

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \cos(x)\sin(x)) + c$$

Aufgabe 5 Gegeben sei für $\omega > 0$ der folgende Verlauf der Stromstärke $I(t)$ für $t \in [0, T]$:

$$I(t) = \begin{cases} I_0 \cdot \sin(\omega t), & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & \frac{T}{2} < t \leq T. \end{cases}$$

Berechnen Sie die mittlere Stromstärke $\overline{I}$ sowie die effektive Stromstärke (quadratischer Mittelwert) I_{eff} während einer Periode $T = 2\pi/\omega$.

Aufgabe 6 Bestimmen Sie die obere Intervallgrenze $T \in \mathbb{R}$ derart, dass für Bogenlänge L des Graphen von $f : [0, T] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{2x^3}$ gerade $L = 148$ gilt.

Aufgabe 7 Bestimmen Sie für $t \in [0, 4\pi]$ die Bogenlänge der konstant ansteigenden spiralförmigen Raumkurve mit Parameterdarstellung

$$x(t) = t\cos(t), \quad y(t) = t\sin(t), \quad z(t) = t$$

Aufgabe 8 Bestimmen Sie den Schwerpunkt $S = (x_S, y_S)$ der Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = \dfrac{4}{4+x^2}$ und der x-Achse im Intervall $[-2, 2]$.

Hinweis: Weisen Sie zunächst durch Ableiten die folgende Stammfunktion für $a > 0$ nach:

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Aufgabe 9 Berechnen Sie den Schwerpunkt $S = (x_s, y_s)$ der Fläche, welche von der Geraden $f(x) = x + 2$ und der Parabel $g(x) = x^2 - 4$ berandet ist.

Aufgabe 10 Betrachten Sie die Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. Die Graphen G_f und G_g schließen ein Flächenstück F ein.

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt A von F.

b) Bestimmen Sie die Länge L des Randes von F.

Aufgabe 11 Berechnen Sie für die Amplitude $U_0 > 0$ und Kreisfrequenz $\omega > 0$ den Effektivwert (quadratischer Mittelwert) U_{eff} der Wechselspannung

$$U(t) = U_0\left(\cos^2(\omega t) - \frac{1}{2}\right)$$

Hinweis: Sie benötigen für die Aufgabe Stammfunktionen der Form $I_n := \int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$. Nutzen Sie dabei

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \cos(x)\sin(x)\right) + c \\ I_4 &= \int \cos^4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\cos^3(x)\sin(x) + \frac{3}{8}\sin(x)\cos(x) + c \end{aligned}$$

Diese Identitäten ergeben sich mithilfe der Rekursionsformel aus der Vorlesung:

$$I_n = \int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$