

# Ingenieurmathematik 2

## Studiengang Maschinenbau

Dr. Robert Lang

OTH Regensburg

Stand: April 2021

### Inhaltsverzeichnis

<b>0 Geometrie zum Aufwärmen</b>	<b>3</b>
<b>1 Anwendung der Integralrechnung einer Veränderlichen</b>	<b>6</b>
<b>2 Reihen</b>	<b>15</b>
2.1 Zahlenreihen . . . . .	15
2.2 Potenzreihen . . . . .	22
2.2.1 Einführung . . . . .	22
2.2.2 Taylor-Reihen . . . . .	27
2.3 Fourier-Reihen . . . . .	35
<b>3 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher</b>	<b>46</b>
3.1 Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	46
3.2 Partielle Ableitung und Tangentialebene . . . . .	49
3.3 Richtungsableitung und Gradient . . . . .	52
3.4 Extremwertdiskussion . . . . .	58
<b>4 Integralrechnung mehrerer Veränderlicher</b>	<b>67</b>
4.1 Zweidimensionale Bereichsintegrale (Polarkoordinaten und Jacobi-Matrix) . . . . .	67
4.2 Dreidimensionale Bereichsintegrale (Zylinder- und Kugelkoordinaten) . . . . .	80
4.3 Anwendungen: Rotationskörper und Schwerpunkte . . . . .	85
<b>5 Differentialgleichungen</b>	<b>91</b>
5.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	92
5.2 Lineare Differentialgleichungen . . . . .	95
<b>A Projekte</b>	<b>108</b>
A.1 Projekt 1 - Stochastische Anwendungen der Integralrechnung . . . . .	108
A.2 Projekt 2 - Anwendungen der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	115
A.3 Projekt 3 - Das Basler Problem II . . . . .	125

## Kontaktinformationen

@ robert.lang@extern.oth-regensburg.de

OTH Regensburg - Fakultät Informatik und Mathematik

## Literatur

### Ingenieurmathematik

- T. Arens, *Mathematik*, Springer Spektrum
- T. Arens, *Arbeitsbuch Mathematik*, Springer Spektrum
- G. Hoever, *Höhere Mathematik Kompakt*, Springer Spektrum
- G. Hoever, *Arbeitsbuch höhere Mathematik*, Springer Spektrum
- J. Koch/M. Stämpfle, *Mathematik für das Ingenieurstudium*, Hanser
- M. Knorrenschild, *Mathematik für Ingenieure 1+2*, Hanser
- L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 1+2*, Vieweg
- Y. Stry/R. Schwenkert, *Mathematik kompakt*, Springer
- T. Westermann, *Mathematik für Ingenieure*, Springer Spektrum

### Formelsammlungen

- L. Papula, *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Vieweg
- H. Bartsch, *Taschenbuch mathematischer Formeln für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Hanser

## 0 Geometrie zum Aufwärmen

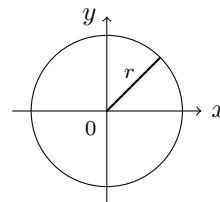
Noch vor dem Start der eigentlichen Vorlesung fasst dieses Kapitel zur Geometrie wesentliche Grundlagen zusammen, die später als bekannt vorausgesetzt werden.

### Kreise und Kugeln

Für einen Radius  $r > 0$  ist die Menge

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

ein Kreis.



Verallgemeinert man auf mehrere Dimensionen  $n \in \mathbb{N}$ , so nennt man Kreise im Allgemeinen Kugeln:

$$\begin{aligned} K &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2\} \\ &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{x_1}{r}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{r}\right)^2 = 1\} \end{aligned}$$

Für den Sonderfall  $n = 1$  ergibt sich:

$$K = \{x \in \mathbb{R} \mid \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1\} = \{-r, r\}$$

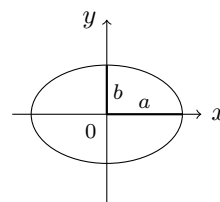
Der 1-dimensionalen Kreis mit Radius  $r$  ist also eine Menge mit den beiden Elementen  $\pm r \in \mathbb{R}$ .

Bemerkung: Manchmal ist mit „Kreis“ eigentlich die „Kreisfläche“ gemeint. Diese wird beschrieben, indem man in den obigen Mengen  $K$  die Bedingung  $= r^2$  durch  $\leq r^2$  ersetzt.

### Ellipsen und Ellipsoide

Möchte man den Kreis in eine Richtung „stauchen“ oder „strecken“, so ist in der Definition eines Kreis in jeder Richtung anstelle eines Radius  $r$  eine sogenannte Halbachse zu definieren. Für  $n = 2$  ergeben sich zwei Halbachsen  $a, b > 0$ :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$$



Verallgemeinert man auf mehrere Dimensionen  $n \in \mathbb{N}$ , so nennt man Ellipsen im Allgemeinen Ellipsoide, für die  $n$  Halbachsen  $a_1, \dots, a_n$  existieren:

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 = 1\}$$

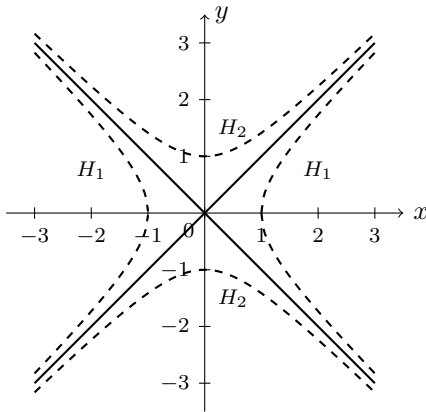
### Hyperbeln

Betrachtet man eine Ellipse in  $n = 2$  Dimensionen, so ergibt sich aus einem veränderten relativen Vorzeichen zwischen  $x$ - und  $y$ -Koordinate zwei mögliche Hyperbeln mit den beiden Halbachsen  $a, b > 0$ :

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$$

$$H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1\}$$

Die Menge  $H_1$  nennt man eine Hyperbel in der 1. Hauptlage,  $H_2$  nennt man eine Hyperbel in der 2. Hauptlage. Sie lassen sich durch ein Vertauschen von  $x$  und  $y$  ineinander überführen.



In der ersten Hauptlage  $H_1$  (linke und rechte Hyperbel-Äste) gibt es für bestimmte  $x$ -Werte ( $|x| < 1$ ) keine Lösung für  $y$ , um  $(x, y) \in H_1$  zu erhalten. In der zweiten Hauptlage  $H_2$  (obere und untere Hyperbel-Äste) gibt es keine Punkte  $(x, y) \in H_2$  für ( $|y| < 1$ ).

Die  $x$ - und  $y$ -Werte von Hyperbeln sind - anders als bei Kreisen und Ellipsen - nicht beschränkt.

Bemerkung: Es gibt auch eine Verallgemeinerung von Hyperbeln auf den  $\mathbb{R}^n$ : Dazu betrachte man eine Ellipse  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  und wählt für jede Koordinate ein relatives Vorzeichen. In fünf Dimensionen (mit Halbachsen  $a_i > 0$ ) ergibt sich etwa:

$$H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 - \left(\frac{x_4}{a_4}\right)^2 - \left(\frac{x_5}{a_5}\right)^2 = 1\}$$

### Verschiebungen von geometrischen Körpern

Möchte man die besprochenen geometrischen Objekte nicht um den Ursprung  $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$  sondern um  $\vec{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$  legen, so gilt:

$$K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{x_1 - m_1}{r}\right) + \dots + \left(\frac{x_n - m_n}{r}\right) = 1\}$$

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{x_1 - m_1}{a_1}\right) + \dots + \left(\frac{x_n - m_n}{a_n}\right) = 1\}$$

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x - m_1}{a}\right) - \left(\frac{y - m_2}{b}\right) = 1\} \quad (\text{nur } n = 2, H_2 \text{ analog})$$

### Zweidimensionale Parametrisierung

Ein zweidimensionaler Kreis lässt sich in Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  darstellen als

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

Für eine zweidimensionale Ellipse mit Halbachsen  $a, b > 0$  gilt:

$$x = a \cos(\varphi)$$

$$y = b \sin(\varphi)$$

Bereits am Ende des ersten Kapitels in „Ingenieurmathematik 1“ wurde die Parametrisierung der Hyperbel mit den Halbachsen  $a, b > 0$  mittels der hyperbolischen Funktionen eingeführt:

$$x = \pm \cosh(\varphi)$$

$$y = b \sinh(\varphi)$$

## Gemeinsame Darstellung

In der Sprache der linearen Algebra lässt sich eine gemeinsame Darstellung der besprochenen geometrischen Objekte finden. Für einen Punkt  $m \in \mathbb{R}^n$  und eine Diagonalmatrix  $D = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist

$$M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\vec{x} - \vec{m})^\top \cdot D \cdot (\vec{x} - \vec{m}) = 1\}$$

eine gemeinsame Darstellung eines

- Kreises:  $d_k = \frac{1}{r^2}$  für alle  $r > 0$  und  $k = 1, \dots, n$
- Ellipse:  $d_k = \frac{1}{a_k^2}$  für alle  $a_k > 0$  und  $k = 1, \dots, n$
- Hyperbel:  $d_k = \frac{s_k}{a_k^2}$  für alle  $a_k > 0$ ,  $|s_k| = 1$  und  $k = 1, \dots, n$

Möchte man ferner die Hauptachsen drehen, so ergibt sich mit einer Drehmatrix  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$M_V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\vec{x} - \vec{m})^\top \cdot V^\top D V \cdot (\vec{x} - \vec{m}) = 1\}$$

Der Typ der vorliegenden Geometrie ist vollständig beschrieben durch die Eigenwerte und Eigenvektoren (Hauptachsen) der Matrix  $V^\top D V$ , also den Eigenwerten von  $D$ .

# 1 Anwendung der Integralrechnung einer Veränderlichen

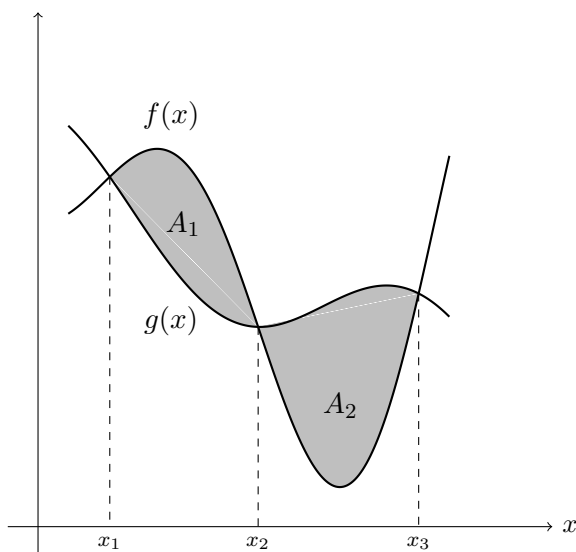
Zu Beginn des zweiten Semesters soll die (eindimensionale) Integralrechnung in unterschiedlichen Anwendungsfeldern wiederholt und vertieft werden.

## 1. Flächenberechnung

Der Flächeninhalt  $A$  eines Flächenstücks, das im Intervall  $I = [a, b]$  durch die Graphen der Funktion  $f$  und  $g$  begrenzt wird, ist

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Möchte man die insgesamt eingeschlossene Fläche explizit berechnen, so ist zunächst festzustellen, welche Funktion in welchen Bereichen die größere darstellt. Es gilt illustrativ:



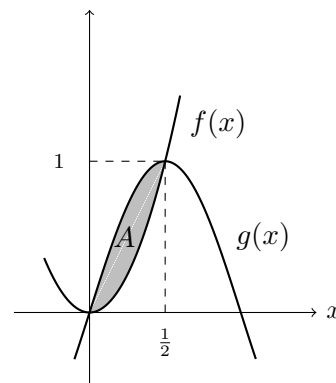
Für die eingeschlossene Fläche gilt:

$$A = A_1 + A_2 = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{(f(x) - g(x))}_{\geq 0} dx + \int_{x_2}^{x_3} \underbrace{(g(x) - f(x))}_{\geq 0} dx \geq 0$$

**Beispiel 1.1** Welche Fläche wird von den Graphen der reellen Funktionen  $f(x) = 4x^2$  und  $g(x) = \sin(\pi x)$  eingeschlossen?

Die Schnittpunkte der beiden Funktionen,  $f(x) = g(x)$ , ergeben sich zu  $x_1 = 0$  und  $x_2 = \frac{1}{2}$ . In diesem Bereich  $I = [0, \frac{1}{2}]$  gilt  $g(x) \geq f(x)$ , also folgt:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (\sin(\pi x) - 4x^2) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) - \frac{4}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{6} \approx 0,15 > 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$



Bemerkung zu einem Spezialfall

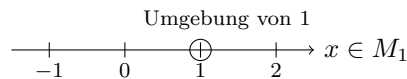
Setzt man  $g \equiv 0$ , so stellt  $A = \int_a^b |f(x)| dx$  die Fläche dar, die zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse im Intervall  $I = [a, b]$  eingeschlossen wird.

## 2. Mittelwerte

Zunächst: Aus der Schule ist die Berechnung von Mittelwerten endlicher Zahlenmengen bekannt, deren Werte diskret, d.h. isoliert liegen.

z.B.  $M_1 = \{-1, 0, 1, 2\}$  und  $M_2 = \{1, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, 2, \frac{5}{2}\}$

In der Umgebung etwa von  $x = 1 \in M_1$  liegt nur dieses eine (isolierte) Element aus  $M_1$ .



$$\rightarrow \text{Mittelwert von } M_1: m = \frac{1}{4}(-1 + 0 + 1 + 2) = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \text{Mittelwert von } M_2: m = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{7}{6} + \frac{4}{3} + 2 + \frac{5}{2}\right) = \frac{8}{5}$$

Allgemein lautet für eine endliche Menge  $M = \{x_1, \dots, x_n\}$  der Mittelwert:

$$m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

Verallgemeinerung: Betrachtet man eine reelle Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so erhält man eine Menge mit (potentiell) unendlich vielen Ergebnisse  $M = \{y \mid y = f(x) \ x \in [a, b]\}$ .

**Definition 1.1** Unter dem **linearen Mittelwert**  $m$  einer reellen Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  versteht man die Größe

$$m := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Unter dem **quadratischen Mittelwert**  $q$  einer reellen Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  versteht man die Größe

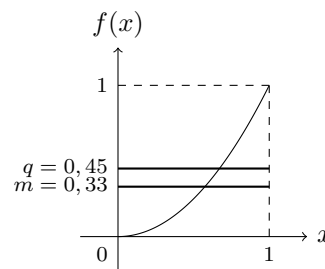
$$q := \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2 dx}$$

**Beispiel 1.2** Die folgenden Beispiele illustrieren die Berechnung von linearen und quadratischen Mittelwerten.

(i)  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$

$$m = \frac{1}{1-0} \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

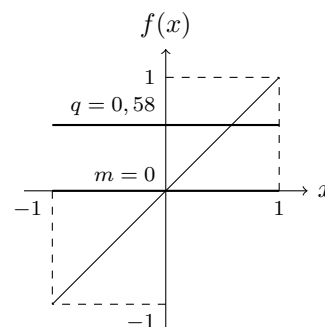
$$q = \sqrt{\frac{1}{1-0} \int_0^1 x^4 dx} = \sqrt{\left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,45$$



(ii)  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x$

$$m = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^1 x dx = \frac{1}{2} [x^2]_{-1}^1 = 0$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$$



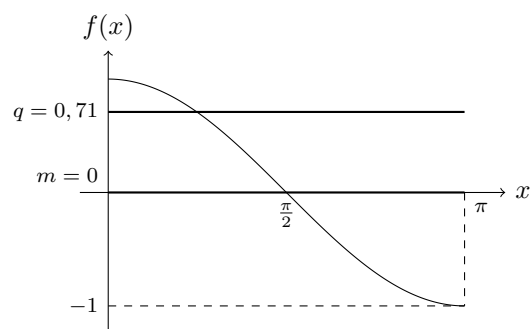
Der lineare Mittelwert ist Null, da die ungerade Funktion  $f(x) = x$  über das zum Ursprung symmetrische Intervall  $I = [-1, 1]$  integriert wird.

(iii)  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \cos(x)$

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x) \, dx = 0$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(x) \, dx}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} (x + \sin(x) \cos(x)) \right]_0^{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Wieder ergibt sich aufgrund der Symmetrie ein linearer Mittelwert von Null.

Die Stammfunktion von  $\cos^2(x)$  kann mittels partielle Integration ( $u = \cos(x)$  und  $v' = \cos(x)$ ) gefunden werden:

$$I = \int \cos^2(x) \, dx = \int \cos(x) \cdot \cos(x) \, dx$$

$$= \cos(x) \sin(x) + \int \underbrace{\sin(x) \cdot \sin(x)}_{=1-\cos^2(x)} \, dx$$

$$= \cos(x) \sin(x) + \underbrace{\int 1 \, dx}_{=x+c} - \underbrace{\int \cos^2(x) \, dx}_{=I}$$

Damit folgt die Integralgleichung

$$2I = \cos(x) \sin(x) + x + c$$

woraus sich die gesuchte Stammfunktion zu  $\cos^2(x)$  finden lässt (Phönix aus der Asche):

$$I = \int \cos^2(x) \, dx = \frac{1}{2} (\sin(x) \cos(x) + x) + c$$

Erweiterung des mathematischen Werkzeugkastens: Stammfunktionen zu  $\cos^n(x)$  für  $n \in \mathbb{N}$

Im letzten Beispiel hat partielle Integration zu einer Stammfunktion von  $\cos^2(x)$  geführt. Im Folgenden wird eine Rekursionsformel für Stammfunktionen zu  $\cos^n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , entwickelt. Ziel ist es, einen rekursiven Ausdruck für

$$I_n := \int \cos^n(x) \, dx$$

zu erhalten, aus dem explizite Ausdrücke für die Stammfunktion leicht abzuleiten sind. Es gilt:

$$I_1 = \int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c$$

$$I_2 = \int \cos^2(x) \, dx = \frac{1}{2} (\sin(x) \cos(x) + x) + c$$



Für  $n \geq 3$  erhält man mittels partieller Integration ( $u = \cos^{n-1}(x)$  und  $v' = \cos(x)$ ):

$$\begin{aligned} I_n &= \int \cos^{n-1}(x) \cdot \cos(x) dx = \cos^{n-1}(x) \sin(x) + \int (n-1) \cos^{n-2}(x) \underbrace{\sin(x) \cdot \sin(x)}_{=1-\cos^2(x)} dx \\ &= \cos^{n-1}(x) \sin(x) + (n-1) \sin(x) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

Damit folgt die Integralgleichung

$$0 = \cos^{n-1}(x) \sin(x) + (n-1) I_{n-2} - n I_n$$

woraus sich die gesuchte Stammfunktion zu  $\cos^n(x)$  finden lässt (Phönix aus der Asche):

$$I_n = \int \cos^n(x) dx = \frac{\cos^{n-1}(x) \sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

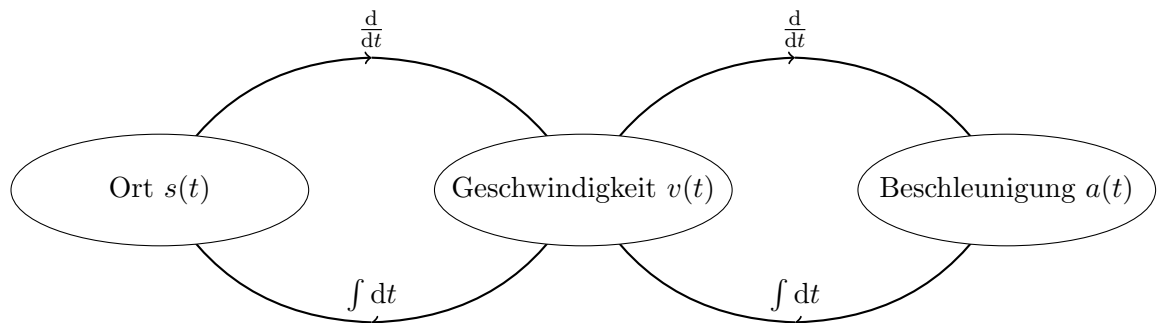
Diese Reskursionsformel erlaubt es, eine Stammfunktion von  $\cos^n(x)$  anzugeben, wenn die Stammfunktion von  $\cos^{n-2}(x)$  bekannt ist. Ausgehend von  $I_1$  und  $I_2$  erhält man also:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \cos^3(x) dx = \frac{1}{3} \cos^2(x) \sin(x) + \frac{2}{3} I_1 \\ &= \frac{1}{3} \cos^2(x) \sin(x) + \frac{2}{3} \sin(x) + c \\ I_4 &= \int \cos^4(x) dx = \frac{1}{4} \cos^3(x) \sin(x) + \frac{3}{4} I_2 \\ &= \frac{1}{4} \cos^3(x) \sin(x) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} (\sin(x) \cos(x) + x) + c \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \cos^3(x) \sin(x) + \frac{3}{8} \sin(x) \cos(x) + c \end{aligned}$$

Analog lassen sich Ausdrücke für  $I_5$  (ausgehend von  $I_3$ ) und  $I_6$  (ausgehend von  $I_4$ ) sowie für höhere Exponenten  $n \in \mathbb{N}$  finden.

### 3. Bewegungsgleichungen

Ableiten einer Funktion  $f$  nach einer Variablen (z.B.  $x$ ) bedeutet, die (lokale) Veränderung von  $f$  nach dieser Variablen zu untersuchen. Physikalisch bedeutet dies, wenn man nach der Zeitvariable (z.B.  $t$ ) ableitet:

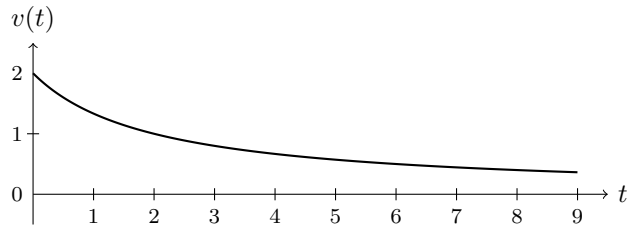


Es gelten die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$s(t) = \int v(t) dt \text{ bzw. } v(t) = \dot{s}(t) \quad \text{Weg-Zeit-Gesetz}$$

$$v(t) = \int a(t) dt \text{ bzw. } a(t) = \dot{v}(t) \quad \text{Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz}$$

**Beispiel 1.3** Die Geschwindigkeit eines Objekts sei zeitabhängig mit  $v(t) = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}t}$



Startet das Objekt bei  $t = 0$  am Ort  $s(0) = 0$ , so befindet es sich zur Zeit  $t > 0$  bei

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{2}{1 + \frac{1}{2}\tau} d\tau = 4 \ln \left( 1 + \frac{1}{2}t \right)$$

Alternativ lässt sich eine Stammfunktion von  $v(t)$  finden,

$$\int v(t) dt = 4 \ln \left( 1 + \frac{1}{2}t \right) + c$$

bei der die Integrationskonstante  $c \in \mathbb{R}$  so zu bestimmen ist, dass die geforderte Anfangsbedingung erfüllt ist:

$$s(0) \stackrel{!}{=} 0 = \underbrace{4 \ln(1)}_{=0} + c = c \quad \text{also gilt: } c = 0$$

Die Beschleunigung zur Zeit  $t$  ist

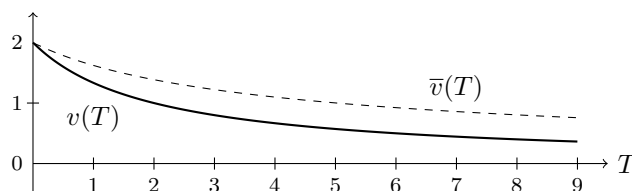
$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{-2}{\left(1 + \frac{1}{2}t\right)^2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{4}{(2+t)^2} < 0$$

Aus  $a(t) < 0$  lässt sich erkennen, dass die Geschwindigkeit abnehmend ist, d.h. ein Bremsvorgang vorliegt.

Wie lautet die durchschnittliche Geschwindigkeit im Beobachtungsintervall  $I = [0, T]$ ? Dies ergibt sich, indem die zurückgelegte Wegstrecke  $s(T) - s(0)$  in Relation zur Beobachtungsdauer  $T$  bezogen wird. Dies entspricht gerade der Definition des linearen Mittelwerts  $m = \bar{v}(T)$ :

$$\bar{v}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{4}{T} \ln \left( 1 + \frac{1}{2}T \right)$$

Die durchschnittliche Geschwindigkeit  $\bar{v}(T)$  zum Zeitpunkt  $T$  ist aufgrund des Bremsvorgangs stets größer als die momentane Geschwindigkeit:  $\bar{v}(T) \geq v(T)$ . Es gilt insbesondere  $\lim_{T \rightarrow 0} \bar{v}(T) = v(0) = 2$ .



#### 4. Bogenlänge

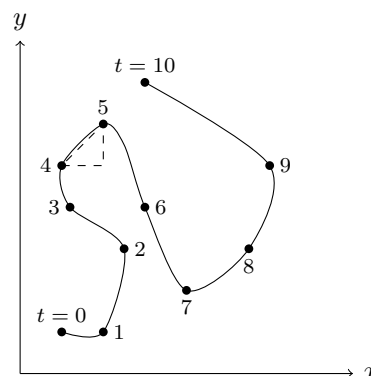
##### a) Bogenlänge in 2D

Eine **ebene Kurve** lautet in Parameterdarstellung

$$\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

wobei  $t \mapsto x(t)$  und  $t \mapsto y(t)$  stetige Funktionen von einem Parameterintervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  sind. Die Länge der Kurve lässt sich durch die Summe von Hypotenusen kleiner Steigungsdreiecke (siehe nebenstehend für  $t \in [4, 5]$ ) approximieren:

$$c = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$



**Satz 1.2** Für die Bogenlänge  $L$  einer ebenen Kurve  $\{(x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$  mit stetig differenzierbaren Funktionen  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

##### b) Bogenlänge in 3D

Eine **Raumkurve** lautet in Parameterdarstellung

$$\{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

wobei  $t \mapsto x(t)$ ,  $t \mapsto y(t)$  und  $t \mapsto z(t)$  stetige Funktionen von einem Parameterintervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  sind.

**Satz 1.3** Für die Bogenlänge  $L$  einer Raumkurve  $\{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^3$  mit stetig differenzierbaren Funktionen  $x, y, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

##### Bemerkung

Aus dem zwei- und dreidimensionalen Fall lässt sich die Bogenlänge  $L$  direkt auf eine  $n$ -dimensionalen Kurve verallgemeinern:

$$L = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n \dot{x}_k(t)^2} dt$$

mit stetig differenzierbaren Koordinatenfunktionen  $x_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

##### c) Bogenlänge eines Funktionsgraphen

Für eine reelle Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stellt ihr Graph  $G = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$  einen Spezialfall einer ebenen Kurve dar. Für diesen Fall lässt sich die Bogenlänge direkt, d.h. ohne Parametrisierung, formulieren.

**Satz 1.4** Für die Bogenlänge  $L$  des Graphen  $\{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$  einer stetig differenzierbaren Funktion  $f$  gilt:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

**Beispiel 1.4** Im Folgenden werden Beispiele zur Berechnung von Bogenlängen vorgestellt.

- (i) Betrachte die reelle Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^3}$ .

Die Länge der Kurve  $L$  lautet

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

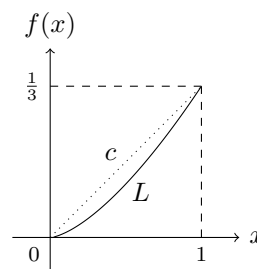
mit Ableitung  $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \sqrt{x}$

Es gilt:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x}{4}} dx = \left[ \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \left[ (4+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 8) \approx 1,060 \end{aligned}$$

Mit Pythagoras ergibt sich im Vergleich die Länge der direkten Verbindung vom Ursprung zum Punkt  $(1, \frac{1}{3})$  zu

$$c = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{10} \approx 1,054$$



- (ii) Für  $t \in [0, 2\pi]$  lautet die Parametrisierung<sup>1</sup> eines Einheitskreises:  $x(t) = -\cos(t)$  und  $y(t) = \sin(t)$ .

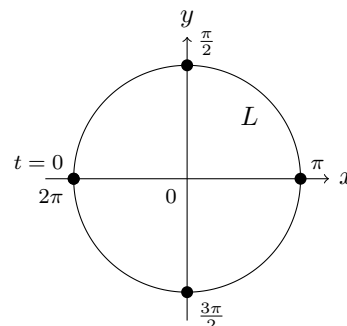
Dies ergibt einen Kreis um den Ursprung mit Radius Eins. Die Länge der Kurve ist der Kreisumfang und elementargeometrisch bekannt:  $L = 2\pi$ .

Alternativ ist  $L$  als Bogenlänge einer zweidimensionalen Kurve zu berechnen:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

Es gilt mit den Ableitungen  $\dot{x}(t) = \sin(t)$  und  $\dot{y}(t) = \cos(t)$ :

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi \quad \checkmark$$

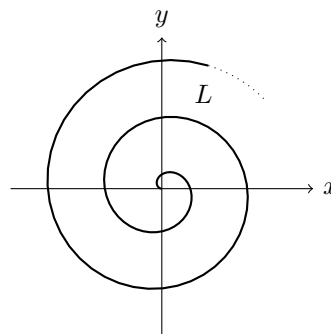


- (iii) Für  $t \in [0, T]$  lautet die Parametrisierung nebenstehender Kurve:

$$x(t) = -t \cdot \cos(t) \quad \text{und} \quad y(t) = t \cdot \sin(t)$$

Dies ist eine um den (dynamischen) Faktor  $t$  skalierte Parametrisierung des vorher betrachteten Einheitskreises. Die Bogenlänge ist wieder

$$L = \int_0^T \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$



<sup>1</sup>Zur Erinnerung: Die Sinus- und Kosinusfunktion wurde auf diese Art im ersten Semester eingeführt.

Es gilt zunächst für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \cos(t) + t \sin(t) \\ \Rightarrow \dot{x}(t)^2 &= \cos^2(t) - 2t \sin(t) \cos(t) + t^2 \sin^2(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \sin(t) + t \cos(t) \\ \Rightarrow \dot{y}(t)^2 &= \sin^2(t) + 2t \sin(t) \cos(t) + t^2 \cos^2(t)\end{aligned}$$

Damit folgt für die Bogenlänge<sup>2</sup>:

$$L = \int_0^T \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_0^T \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{1}{2} \left( T\sqrt{1 + T^2} + \operatorname{arsinh}(T) \right)$$

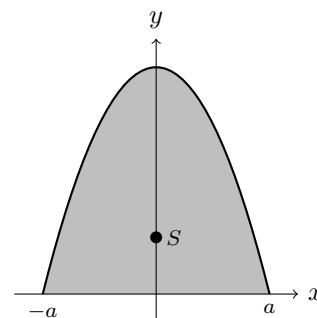
wobei  $\operatorname{arsinh}$  die Umkehrfunktion der  $\sinh$ -Funktion bezeichnet.

**Bemerkung:** In vielen Fällen lassen sich Bogenlängen nicht analytisch sondern nur approximativ (z.B. mithilfe numerischer Verfahren) bestimmen.

## 5. Schwerpunkte

Betrachte eine ebene Fläche mit einer homogenen Dichteverteilung (d.h. jeder einzelne Massepunkt der Fläche ist „gleich schwer“ unabhängig vom Ort). Später im Kapitel 4.3 zu Mehrfachintegralen wird diese Fragestellung auf Flächen und Volumina mit inhomogener Dichteverteilung verallgemeinert.

Rechts ist der Schwerpunkt einer Fläche mit homogener Dichteverteilung zwischen einer umgekehrten Parabel und der  $x$ -Achse ( $g \equiv 0$  im nachstehen Satz) skizziert.



**Satz 1.5** Für ebene Flächen, die zwischen den Graphen zweier Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  mit  $f \geq g$  über dem Intervall  $[a, b]$  eingeschlossen sind, sind die Koordinaten des Schwerpunktes  $S(x_s, y_s)$  gegeben durch:

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b \left( (f(x))^2 - (g(x))^2 \right) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx}$$

**Beispiel 1.5** Betrachte die umgekehrte Parabel  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 4 - x^2$ . Für das Nennerintegral der  $x$ - und  $y$ -Koordinate gilt:

$$N = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[ 4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^2 = 2 \cdot \left( 8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

<sup>2</sup>Es ist bereits eine ähnliche Stammfunktion bekannt (siehe Beispiel 6.3(vii) in „Ingenieurmathematik 1“):

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) \right)$$

Diese konnte mittels Substitution  $x = \sin(u)$  gefunden werden. In dem vorliegenden Fall  $\int \sqrt{1 + t^2} dt$  ist die Substitution  $t = \sinh(u)$  hilfreich. Der Nachweis der angegebenen Stammfunktion ist dem interessierten Leser überlassen.

Für die  $x$ -Koordinate des Schwerpunkt ergibt sich aufgrund der Punktsymmetrie des Integranden und dem zum Ursprung symmetrischen Integrationsbereich  $I = [-2, 2]$ :

$$x_s = \frac{1}{N} \int_{-2}^2 \underbrace{x \cdot (4 - x^2)}_{\text{ungerade Funktion}} dx = 0$$

Für die  $y$ -Komponente gilt:

$$y_s = \frac{1}{2N} \int_{-2}^2 \underbrace{(4 - x^2)^2}_{=16-8x^2+x^4} dx = \frac{3}{64} \left[ 16x + \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-2}^2 = \frac{3}{64} \cdot \frac{512}{15} = \frac{8}{5}$$

## 2 Reihen

### 2.1 Zahlenreihen

Zum Einstieg in Reihen ist eine Wiederholung des Begriffs einer Folge aus dem ersten Semester hilfreich: Eine Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Funktionswerte als  $a_k := a(k)$  geschrieben werden.

**Beispiel 2.1** Betrachte für  $k \in \mathbb{N}_0$  die Folge  $a_k := \frac{1}{1+k^2}$ .

$$\begin{array}{ll} a_0 = 1 & \Rightarrow S_0 = a_0 = 1 \\ a_1 = \frac{1}{2} & \Rightarrow S_1 = a_0 + a_1 = \frac{3}{2} = 1,5 \\ a_2 = \frac{1}{5} & \Rightarrow S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = \frac{17}{10} = 1,7 \\ a_3 = \frac{1}{10} & \Rightarrow S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5} = 1,8 \\ a_4 = \frac{1}{17} & \Rightarrow S_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{158}{85} \approx 1,86 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Folgeelemente  $a_k$                       Summe  $S_n$  der ersten  $n+1$  Elemente

#### Definition 2.1

- Für eine gegebene Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  ist die zugehörige **Reihe** die unendliche Summe über alle Elemente der Folge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

- Die Summe der ersten  $n+1$  Reihenglieder

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

heißt  $n$ -te **Partialsomme** der Reihe.

Daraus ergibt sich eine **Folge von Partialsummen**  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

- Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  **konvergiert** gegen den Grenzwert  $S \in \mathbb{R}$ , wenn die Folge ihrer Partialsummen  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegen  $S$  konvergiert. In diesem Fall wird  $S$  der **Wert** der Reihe genannt und man schreibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S.$$

- Eine nicht konvergente Reihe wird **divergent** genannt.

Falls die Folge der Partialsummen einer Reihe bestimmt divergent ist, dann nennt man auch die Reihe **bestimmt divergent** und schreibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$$

#### Bemerkung

Es ist wichtig, die die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  als Grundlage und  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  als die darauf aufbauende Folge der Partialsummen zu unterscheiden.

**Satz 2.2** (Notwendiges Konvergenzkriterium)

Wenn die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert, dann gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

Bemerkung

- Konvergente Reihen basieren immer auf Nullfolgen.
- Die Umkehrung gilt jedoch *nicht*, da es Nullfolgen gibt, deren Reihe divergiert (z.B. harmonische Reihe mit  $a_k = \frac{1}{k}$ ,  $k \geq 1$ ).

**Beispiel 2.2** Betrachte für  $k \in \mathbb{N}$  die beiden Folgen  $a_k = \frac{1}{k}$  und  $a'_k = \frac{1}{k^2}$ . Daraus ergeben sich die nachstehenden Folgen der Partialsummen:

$n$	$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	$S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$
1	1	1
10	2,9	1,55
100	5,2	1,63
$10^3$	7,5	1,64
$10^4$	9,8	1,64
$10^5$	12,1	1,64
$10^6$	14,4	1,64
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	$\infty$	$\frac{\pi^2}{6}$

Die harmonische Reihe  $S_n$  wächst für große  $n \in \mathbb{N}_0$  langsam aber beständig gegen Unendlich, während die Summe der inversen Quadratzahlen  $S'_n$  gegen einen endlichen Wert<sup>3</sup> konvergiert.

Formal lässt sich die Divergenz der harmonischen Reihe wie folgt nachweisen. Für  $a_k = \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , betrachte man Partialsummen  $S_{2^n}$ , d.h. für steigende  $n \in \mathbb{N}$  eine exponentiell große Anzahl von Summanden (Index  $2^n$ ). Es gilt:

$$\begin{aligned}
 S_{2^n} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2^n} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \Big|_{n=1} + \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] \Big|_{n=2} + \left[ \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} \right] \Big|_{n=3} + \left[ \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} \right] \Big|_{n=4} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{2^n} \Big|_{n \in \mathbb{N}} \\
 &\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1 \text{ Summand}} + \underbrace{\left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right]}_{2 \text{ Summanden}} + \underbrace{\left[ \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} \right]}_{4 \text{ Summanden}} + \underbrace{\left[ \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} \right]}_{8 \text{ Summanden}} + \dots + \frac{1}{2^n} \\
 &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n}}_{n \text{ Summanden } \frac{1}{2}} \\
 &= 1 + \frac{n}{2}
 \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Der Wert  $\frac{1}{6}\pi^2$  der Reihe kann an dieser einführenden Stelle mit den bisherigen Werkzeugen nicht gezeigt werden. Mit den Methoden der Fourier-Analyse beispielsweise wird der Nachweis später möglich sein.



In der Rechnung wurden zunächst die Elemente, die beim Übergang von  $n$  auf  $n + 1$  bei der Partialsumme  $S_{2^n}$  hinzukommen, in Blöcke gruppiert. Jedes Element eines Blocks lässt sich durch den letzten Summanden in diesem Block nach unten abschätzen. Im Block für  $n = 3$  etwa sind alle vier Elemente  $(\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8})$  größer als der letzte Summand  $(\frac{1}{8})$  und können daher durch ihn abgeschätzt werden. Die Blöcke enthalten  $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$  Summanden, sodass die Summe in jedem einzelnen Block stets  $\frac{1}{2}$  ergibt. So gibt es z.B. für  $n = 3$  vier Elemente, die jeweils durch  $\frac{1}{8}$  abgeschätzt werden können:  $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ . Betrachtet man die gesamte Partialsumme  $S_{2^n}$ , so gibt es insgesamt  $n$  Summanden, die durch  $\frac{1}{2}$  abgeschätzt werden können:

$$S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

Vergleicht man diese Abschätzung mit obiger Tabelle ( $S_{10^6} = 14,4$ ), so erhält man für  $n = 20$  in der Partialsumme  $S_{2^n}$  mehr als eine Million Summanden, denn  $2^{20} = 1.048.576 > 10^6$ . Als Abschätzung erhält man den Wert  $S_{2^{20}} \geq 1 + \frac{20}{2} = 11$ , was von  $S_{10^6}$  sogar schon überschritten wird.

Aus der gefundenen Abschätzung erhält man einen Mindestwert für die  $2^n$ -te Partialsumme der harmonischen Reihe. Diese Abschätzung divergiert für  $n \rightarrow \infty$  nach Unendlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_{2^n}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{2}\right) = \infty$$

Damit gilt auch für die harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

**Satz 2.3** (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen) Sei  $b_k > 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Falls die Folge  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  eine monoton fallende Nullfolge ist, dann konvergiert die alternierende Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ .

Bemerkung

Mit dem Leibniz-Kriterium erhält man nur die Existenz eines Grenzwertes der Reihe, ihr Wert ist damit nicht bestimmt.

**Beispiel 2.3** Die alternierende harmonische Reihe ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right| < \infty$$

Mit den Werkzeugen aus einem späteren Kapitel werden wir auch den Wert der Reihe finden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \pm \dots = -\ln(2) \approx -0,69$$

**Definition 2.4** Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt **absolut konvergent**, wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

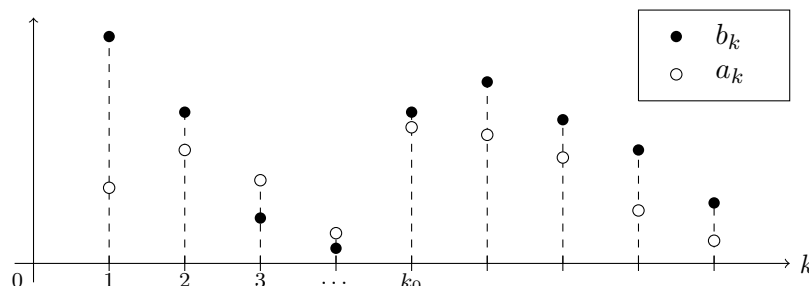
Bemerkung

Die alternierende harmonische ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Grund ist die Divergenz der harmonischen Reihe.

**Satz 2.5** (Vergleichskriterien) Es seien  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  und  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  gegeben.

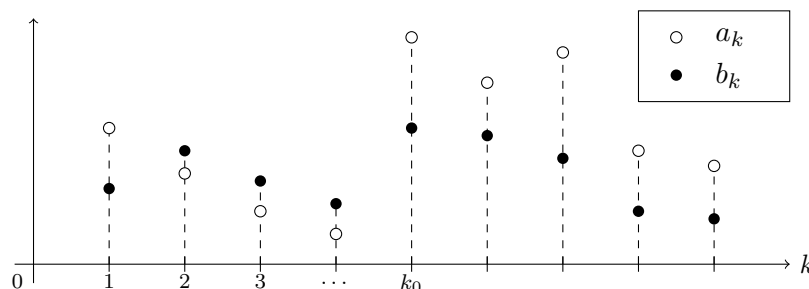
1. Majorantenkriterium (für Konvergenz)

Falls  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergiert und es ein  $k_0 \in \mathbb{N}_0$  gibt mit  $|a_k| \leq b_k$  für  $k \geq k_0$ , dann konvergiert auch  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  (absolut).



2. Minorantenkriterium (für Divergenz)

Sei  $b_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Falls  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  divergiert und es ein  $k_0 \in \mathbb{N}_0$  gibt mit  $a_k \geq b_k$  für  $k \geq k_0$ , dann divergiert auch  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .



Bemerkung

Die Überlegungen zur Divergenz der harmonischen Reihe basieren auf dem Minorantenkriterium.

**Satz 2.6** (Konvergenzkriterien für Reihen) Es sei die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  gegeben.

1. Quotientenkriterium

$$\text{Falls } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \begin{cases} < 1, & \text{dann konvergiert } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ (absolut)} \\ > 1, & \text{dann divergiert } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \\ = 1, & \text{dann ist keine Aussage möglich} \end{cases}$$

2. Wurzelkriterium

$$\text{Falls } \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \begin{cases} < 1, & \text{dann konvergiert } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ (absolut)} \\ > 1, & \text{dann divergiert } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \\ = 1, & \text{dann ist keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Bemerkung: Das Wurzelkriterium ist schärfer als das Quotientenkriterium, d.h. es ist möglich, dass mit dem Quotientenkriterium keine Aussage getroffen werden kann, mit dem Wurzelkriterium hingegen schon.

**Satz 2.7**

1. Die **geometrische Reihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konvergiert (absolut) genau dann, wenn  $|q| < 1$  ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}, \text{ falls } |q| < 1$$

2. Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  konvergiert genau dann, wenn  $\alpha > 1$ .
3. Die **alternierende harmonische Reihe**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$  konvergiert.
4. Die **Exponentialreihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$  konvergiert (absolut) und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots = e$$

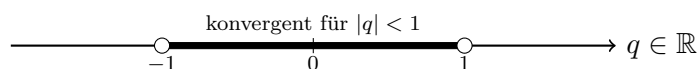
**Beispiel 2.4** Zur Anwendung der Konvergenzkriterien werden im Folgenden die Aussagen des vorangegangenen Satzes im Detail untersucht.

- (i) Für  $q \in \mathbb{R}$  betrachte man die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  mit  $a_k = q^k$ . Die  $n$ -te Partialsumme erhält man mit der geometrischen Summenformel

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} n + 1, & \text{falls } q = 1 \\ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & \text{falls } q \neq 1 \end{cases}$$

Im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  gilt für  $|q| < 1$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$ . Für  $q > 1$  divergiert die Folge  $q^{n+1}$  gegen  $\infty$ , für  $q \leq -1$  ist sie unbestimmt divergent. Aufgrund der obigen Fallunterscheidung ist zusätzlich  $q = 1$  zu betrachten, also  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) = \infty$ . Insgesamt erhält man also Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q} \quad \text{falls } |q| < 1$$



Mit dem Quotientenkriterium finden man ebenfalls den konvergenten Bereich:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{q^{k+1}}{q^k} \right| = |q| \quad (\text{Quotient unabhängig von } k)$$

Aus diesem Grenzwert besagt das Quotientenkriterium unmittelbar, dass für  $|q| < 1$  Konvergenz und für  $|q| > 1$  Divergenz folgt. Für die beiden speziellen Punkten  $q = \pm 1$ , für die aus den vorherigen Überlegungen bestimmte Divergenz ( $q = 1$ ) sowie unbestimmte Divergenz ( $q = -1$ ) folgt, kann man mithilfe des Quotientenkriteriums nichts aussagen.

(ii) Betrachte die Folge  $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$  für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Mit dem Quotientenkriterium findet man

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{k}{k+1} \right)^\alpha \right| = 1 \quad (\text{Grenzwert unabhängig von } \alpha)$$

$\Rightarrow$  Das Quotientenkriterium führt zu keiner Aussage zur Konvergenz der Reihe.

Mit dem Wurzelkriterium findet man

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^\alpha} = 1 \quad (\text{Grenzwert unabhängig von } \alpha)$$

$\Rightarrow$  Das Wurzelkriterium führt ebenfalls zu keiner Aussage zur Konvergenz der Reihe.

### Bemerkung

Die eingeführten Konvergenzkriterien sind nicht ausreichend, um die Konvergenz von der Reihe zu  $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$  zu entscheiden. Der Nachweis kann man mithilfe weiterführender Kriterien erfolgen, die in dieser Vorlesung nicht eingeführt werden.

Mit einer sehr ähnlichen Technik wie beim Nachweis der Divergenz der harmonischen Reihe, lässt sich mittels nachstehenden Überlegungen die gesuchte Konvergenz formal nachweisen<sup>4</sup>:

Für  $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $\alpha > 0$ <sup>5</sup>, betrachte man Partialsummen  $S_{2^n}$ , d.h. für steigende  $n \in \mathbb{N}$  eine exponentiell große Anzahl von Summanden (Index  $2^n$ ). Es gilt:

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} \Big|_{n=1} + \left[ \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} \right] \Big|_{n=2} + \left[ \frac{1}{5^\alpha} + \dots + \frac{1}{8^\alpha} \right] \Big|_{n=3} + \frac{1}{9^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^n)^\alpha} \Big|_n \\ &\leq 1 + 1 + \underbrace{\left[ \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} \right]}_{2 \text{ Summanden}} + \underbrace{\left[ \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{4^\alpha} \right]}_{4 \text{ Summanden}} + \underbrace{\left[ \frac{1}{8^\alpha} + \dots + \frac{1}{8^\alpha} \right]}_{8 \text{ Summanden}} + \dots + \underbrace{\left[ \dots + \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} \right]}_{2^{n-1} \text{ Summanden}} \\ &= 1 + 1 + \underbrace{\frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{(2^2)^\alpha} + \frac{2^3}{(2^3)^\alpha} + \dots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^\alpha}}_{\text{geometrische Summe mit } q = 2^{1-\alpha}} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (2^{1-\alpha})^k \end{aligned}$$

In der Rechnung wurden zunächst die Elemente, die beim Übergang von  $n$  auf  $n+1$  bei der Partialsumme  $S_{2^n}$  hinzukommen, in Blöcke gruppiert. Jedes Element eines Blocks lässt sich durch den letzten Summanden des vorherigen Block nach oben abschätzen. Im Block für  $n=3$  etwa sind alle vier Elemente  $(\frac{1}{5^\alpha}, \frac{1}{6^\alpha}, \frac{1}{7^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha})$  kleiner als der letzte Summand des vorherigen Blocks  $(\frac{1}{4^\alpha})$  und können daher durch ihn abgeschätzt werden. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass  $n \mapsto n^\alpha$  für  $\alpha > 0$  eine monoton steigende Funktion in  $n \in \mathbb{N}$  darstellt. Die Blöcke enthalten  $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$  Summanden, sodass jeder einzelnen Block ein Element einer geometrischen Summe bildet. So gibt es z.B. für  $n=3$  vier Elemente, die jeweils durch  $\frac{1}{4^\alpha}$  abgeschätzt werden können:  $4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} = \frac{2^2}{(2^2)^\alpha}$ . Mit dieser Beobachtung ergibt sich:

$$S_{2^n} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} q^k \quad \text{mit } q = 2^{1-\alpha}$$

<sup>4</sup>Eine Verallgemeinerung dieser Überlegungen führen auf das so genannte **Verdichtungskriterium von Cauchy**.

<sup>5</sup>Für  $\alpha < 0$  dreht sich der Bruch um und die Divergenz der Reihe ist ebenso offensichtlich wie für  $\alpha = 0$ .

Die geometrische Reihe konvergiert, falls  $|q| < 1$  gilt, also:

$$\begin{aligned} |q| < 1 &\iff 2^{1-\alpha} < 1 \quad | \log_2(\cdot) \\ &\iff 1 - \alpha < 0 \\ &\iff \alpha > 1 \end{aligned}$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt die gesuchte Konvergenz  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty$  für  $\alpha > 1$ .

(iii) Betrachte  $a_k = \frac{1}{k}$  für  $k \in \mathbb{N}$  und dazu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \pm \dots$$

Die alternierende harmonische Reihe ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, da die zugrundeliegende Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$

- eine Nullfolge ist:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ ,
- eine monoton fallende Folge ist:  $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$  für alle  $n > m$ .

#### Bemerkung

Zum Nachweis von Monotonie ist es möglich, nach Fortsetzung der Folge auf  $D \subseteq \mathbb{R}$  mit Ableitungen zu arbeiten. In diesem Fall ist  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$  eine Fortsetzung der Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  auf die reellen Zahlen. Es gilt  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ , d.h. die Funktion  $f$  ist (streng) monoton fallend. Damit ist auch die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  monoton fallend.

(iv) Betrachte die Folge  $a_k = \frac{1}{k!}$ . Es gilt mit dem Quotientenkriterium:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1+k} = 0 < 1$$

Demnach ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$  konvergent.

Mit den Werkzeugen aus einem späteren Kapitel werden wir auch den Wert der Reihe finden:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots = e \approx 2,71828$$

**Beispiel 2.5** Die nachstehenden Reihen sollen auf Konvergenz untersucht werden:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+1} = -\frac{3}{2} + \frac{9}{3} - \frac{27}{4} + \frac{81}{5} \pm \dots$$

Zunächst stellt sich die Frage, ob die der Reihe zugrunde liegende Folge  $a_n = \frac{(-3)^n}{n+1}$  eine Nullfolge ist. Für den Betrag<sup>6</sup> ergibt sich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-3)^n}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n+1} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot \ln 3}{1} = \infty$$

$\Rightarrow$  Reihe ist divergent, da keine zugrundeliegende Nullfolge.

---

<sup>6</sup>Es gilt:  $a_n \rightarrow 0 \iff |a_n| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} = \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2} + \frac{(\ln 2)^3}{6} + \frac{(\ln 2)^4}{24} \pm \dots \quad (\text{mit } \ln 2 \approx 0,69)$$

Mit dem Quotientenkriterium findet man die Konvergenz der Reihe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln 2)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot (\ln 2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0 < 1$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = -(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \pm \dots$$

ist eine alternierende Reihe mit den folgenden Eigenschaften:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0 \Rightarrow$  Nullfolge ✓
- Monotonie folgt aus der fortgesetzten Funktion  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$  und der Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} < 0 \Rightarrow \text{monoton fallende Funktion } \checkmark$$

$\Rightarrow$  Gemäß dem Leibniz-Kriterium ist die Reihe konvergent.

## 2.2 Potenzreihen

### 2.2.1 Einführung

Bisher: Betrachtung von Zahlenreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

Jetzt: Betrachtung von Potenzreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k =: \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)$

**Definition 2.8** Die Funktionenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

heißt **Potenzreihe** mit **Entwicklungspunkt**  $x_0 \in \mathbb{R}$  und den **Koeffizienten**  $a_k \in \mathbb{R}$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ ).

Die Menge aller  $x \in \mathbb{R}$ , für die die Potenzreihe konvergiert, nennt man **Konvergenzbereich**  $K$  der Potenzreihe:

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \text{ konvergiert} \right\}$$

Bemerkung: Durch die freie Variable  $x \in \mathbb{R}$  definiert die Potenzreihe eine Funktion

$$f: K \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

### Beispiel 2.6

- (i) Betrachte die zur Folge  $a_k = \frac{1}{k!}$  gehörende Potenzreihe um Null (d.h.  $x_0 = 0$ ):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

Es folgt  $f(x_0) = f(0) = 1$  und aus Satz 2.7 ist außerdem  $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$  bekannt.

Frage: Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die Potenzreihe?

Dazu fasst man die Summanden  $a_k(x - x_0)^k =: b_k(x)$  als eine  $x$ -abhängige Zahlenreihe auf und nutzt die bereits bekannten Konvergenzkriterien für  $b_k(x)$ .

→ Quotientenkriterium:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k+1}(x)}{b_k(x)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{k+1} \cdot k!}{(k+1)! \cdot x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 < 1$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von  $x \in \mathbb{R}$ , weshalb nach dem Quotientenkriterium die Potenzreihe  $f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert. Damit gilt für den Konvergenzbereich  $K = \mathbb{R}$ .

(ii) Betrachte für  $q \neq 0$  die Potenzreihe mit Koeffizienten  $a_k = q^k x^k$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k x^k \quad (\text{Entwicklung um } x_0 = 0)$$

→ Quotientenkriterium:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k+1}(x)}{b_k(x)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{q^{k+1} x^{k+1}}{q^k x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |q| \cdot |x| = |q| \cdot |x| \stackrel{!}{=} 1$$

Also ist das Quotientenkriterium erfüllt für  $|x| < \frac{1}{|q|}$ . Für den Konvergenzbereich gilt:

$$K = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \frac{1}{|q|}\} = \left(-\frac{1}{|q|}, \frac{1}{|q|}\right)$$

An den Rändern von  $K$  ist die Potenzreihe divergent, denn für  $x = \pm \frac{1}{|q|}$  ist

$$b_k = q^k \cdot x^k = q^k \cdot (\pm 1)^k = \frac{q^k}{|q|^k} \cdot (\pm 1)^k$$

keine Nullfolge (für  $k \rightarrow \infty$ ), weshalb das notwendige Konvergenzkriterium verletzt ist.

(iii) Betrachte die Potenzreihe um  $x_0 = 0$  mit  $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ , also

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}$$

→ Quotientenkriterium:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k+1}(x)}{b_k(x)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-x)^{k+1} \cdot k}{(k+1) \cdot (-x)^k} \right| = |x| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = |x| \stackrel{!}{=} 1$$

Also ist das Quotientenkriterium erfüllt für  $|x| < 1$ . An den Rändern ist zwischen  $x = +1$  und  $x = -1$  zu unterscheiden (siehe auch Satz 2.7):

- Für  $x = +1$  ist  $f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$  die *alternierende* harmonische Reihe. Diese ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.
- Für  $x = -1$  hingegen ist  $f(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  die harmonische Reihe, welche divergiert.

Für den Konvergenzbereich folgt insgesamt:  $K = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\} \cup \{1\} = (-1, 1]$ .

Zusammenfassung der Beobachtung aus den drei Beispielen:

Der Konvergenzbereich kann ganz  $\mathbb{R}$  sein oder ein (um den Entwicklungspunkt  $x_0$ : hier stets  $x_0 = 0$ ) symmetrisches Intervall. Die Konvergenz an den Rändern des Intervalls ist dabei höchst unterschiedlich und muss individuell betrachtet werden.

**Satz 2.9** Für jede Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  existiert eine eindeutig bestimmte Zahl  $r \geq 0$ , der sogenannte **Konvergenzradius** der Potenzreihe, so dass gilt:

1. Falls  $r = 0$ , dann konvergiert die Potenzreihe nur für  $x = x_0$ .
2. Falls  $0 < r < \infty$ , dann konvergiert die Potenzreihe für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < r$  absolut und divergiert für alle  $x$  mit  $|x - x_0| > r$ .  
Über die Konvergenz für  $|x - x_0| = r$  lässt sich ohne weitere Untersuchung nichts aussagen.
3. Falls  $r = \infty$ , dann konvergiert die Potenzreihe für alle  $x \in \mathbb{R}$  absolut.

Der Konvergenzradius  $r$  lässt sich ermitteln durch

$$(I) \ r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{oder} \quad (II) \ r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

aber nur, falls diese Grenzwerte (eigentlich oder uneigentlich) existieren.

Bemerkung: Die Formel (I) für die Berechnung des Konvergenzradius bezeichnet man manchmal als „inverses Quotientenkriterium“, die Formel (II) als „inverses Wurzelkriterium“. Sie lassen sich allgemein aus den beiden Kriterien ableiten.

**Beispiel 2.7** Betrachtet man nochmals die drei Beispiele von oben, so lassen sich die für die zuvor gefundenen Intervalle geltenden Konvergenzradien bestätigen:

- (i) Für die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$  erhält man den Konvergenzradius

$$r \stackrel{(I)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty \quad \checkmark$$

Also ist  $r = \infty$ , d.h.  $K = \mathbb{R}$ , wie zuvor mit dem Quotientenkriterium für  $b_k(x) = a_k x^k$  gefunden wurde.

- (ii) Für  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k x^k$  erhält man den Konvergenzradius

$$r \stackrel{(II)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|q^k|}} = \frac{1}{|q|} \quad \checkmark$$

Der Konvergenzradius  $r = \frac{1}{|q|}$  stimmt auch hier mit dem zuvor gefundenen Konvergenzbereich  $K = (-\frac{1}{|q|}, \frac{1}{|q|})$  überein. Alternativ lässt sich der Konvergenzradius mit dem inversen Quotientenkriterium finden:

$$\stackrel{(I)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|q|} = \frac{1}{|q|} \quad \checkmark$$

- (iii) Für  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$  erhält man den Konvergenzradius

$$\stackrel{(I)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1 \quad \checkmark$$

Der Konvergenzradius  $r = 1$  stimmt wiederum mit dem zuvor gefundenen Konvergenzbereich  $K = (-1, 1]$  überein. Über die Ränder von  $K$  allerdings kann der Konvergenzradius nichts aussagen.



**Satz 2.10** (Rechenregeln für Potenzreihen)

1. Zwei **Potenzreihen** mit Konvergenzradien  $r_1, r_2$  und Entwicklungspunkt  $x_0$  werden **summandenweise addiert bzw. subtrahiert**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)(x-x_0)^k$$

Für den Konvergenzradius  $r$  der Summe/Differenz der Potenzreihen gilt:  $r \geq \min\{r_1, r_2\}$ .

2. Die **Multiplikation von zwei Potenzreihen** mit den Konvergenzradien  $r_1, r_2$  und Entwicklungspunkt  $x_0$  ergibt eine Potenzreihe

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x-x_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x-x_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

mit Konvergenzradius  $r \geq \min\{r_1, r_2\}$  und Koeffizienten

$$c_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

3. Nachstehende Potenzreihe habe den Konvergenzradius  $r > 0$  (auch  $r = \infty$ ):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots$$

Dann ist durch  $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x-x_0| < r$  eine **beliebig oft differenzierbare und integrierbare** Funktion definiert.

Die Ableitungen und Integrale können **summandenweise** berechnet werden und haben denselben Konvergenzradius  $r$  wie  $f$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots \\ \int f(x) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + c = \\ &= a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x-x_0)^3 + \dots + c \end{aligned}$$

**Beispiel 2.8**

- (i) Betrachtet man das Quadrat der Funktion  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ , also der Produkt mit sich selbst, so erhält man:

$$f^2(x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$\begin{aligned} \text{mit Koeffizienten } c_k &= \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \cdot \frac{1}{(k-l)!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} = \frac{2^k}{k!} \end{aligned}$$

Nach der Identifikation der Binomialkoeffizienten kann man die Summe als Spezialfall des binomischen Lehrsatzes  $(y+z)^k$  für  $y = z = 1$  interpretieren, womit sich der Faktor  $2^k$  ergibt. Insgesamt folgt:

$$f^2(x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!}$$

(ii) Betrachte die Potenzreihe  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$  mit dem bekannten Konvergenzradius  $r = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Damit folgt } f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{(-1)^k}{k} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{k-1} = -1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 \pm \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sowie } \int f(x) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{(-1)^k}{k} x^k dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} x^{k+1} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{30}x^6 \mp \dots \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius von  $f'(x)$  und  $\int f(x) dx$  bleibt mit  $r = 1$  erhalten.

### Bemerkungen zu Potenzreihen im Komplexen

- Potenzreihen lassen sich analog auch für komplexe Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  definieren, d.h. durch

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

für einen Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  wird mit den Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$  eine komplexe Funktion  $f : K \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto f(z)$  definiert.

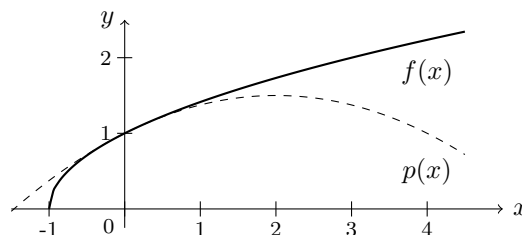
Die bisher gemachten Aussagen über Konvergenz und Rechenregeln gelten auch im Komplexen unverändert weiter.

- In den komplexen Zahlen lassen sich viele Eigenschaften von Potenzreihen oder die übliche Nomenklatur besser verstehen.

Zum Beispiel ist im Komplexen der Konvergenzradius  $r \in \mathbb{R}$  tatsächlich der Radius eines Kreises um  $z_0 \in \mathbb{C}$ , in dessen Innern, d.h. für  $|z - z_0| < r$ , die (komplexe) Potenzreihe konvergiert.

## 2.2.2 Taylor-Reihen

**Beispiel 2.9** Zur Einführung betrachte man für  $x \in (-1, \infty)$  die Wurzelfunktion  $f(x) = \sqrt{1+x}$ . Die „nähere“ Umgebung von  $x_0 = 0$ , d.h. etwa bis  $x = \pm \frac{1}{2}$ , soll untersucht werden.



Kurze Kurvendiskussion von  $f$  für  $x_0 = 0$

Es gilt  $f(0) = 1$ . Die erste sowie zweite Ableitung ergibt sich zu

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

also gilt  $f'(0) = \frac{1}{2}$  sowie  $f''(0) = -\frac{1}{4}$ .

Betrachtet man neben der Funktion  $f$  zusätzlich das Polynom  $p(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ , so stelle man fest, dass dieses bis hin zur zweiten Ableitung die gleichen Ergebnisse für den Punkt  $x_0 = 0$  liefert (siehe auch den gestrichelten Graphen von  $p$  in obiger Skizze):

$$p(0) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \Big|_{x_0=0} = 1 \stackrel{?}{=} f(0) \quad \checkmark$$

$$p'(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \Big|_{x_0=0} = \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} f'(0) \quad \checkmark$$

$$p''(0) = -\frac{1}{4} \stackrel{?}{=} f''(0) \quad \checkmark$$

Nicht nur graphisch sondern auch tatsächlich approximiert das Polynom  $p$  die Funktion  $f$  in der Umgebung von  $x_0 = 0$  sehr gut:

$$p\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{839}{800} \approx 1,04875$$

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = \sqrt{\frac{11}{10}} \approx 1,04881$$

$$p\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{219}{200} \approx 1,09500$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1,09545$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{39}{32} \approx 1,21875$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22474$$

Unterstrichen sind in den Ergebnissen die Dezimalen, in denen die Funktion  $f(x)$  und die Approximation durch  $p(x)$  für  $x \in \{\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\}$  paarweise übereinstimmen. Je weiter man sich vom Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  entfernt, desto größer werden die Abweichungen zwischen  $f(x)$  und  $p(x)$ . In einer kleinen Umgebung um den Entwicklungspunkt approximiert das Polynom die Wurzelfunktion jedoch sehr gut. Grund dafür ist, dass dort beide Funktionen vom gleichen Wert aus mit der gleichen Steigung sowie gleichen Krümmung starten. Da  $p$  eine Parabel ist, nennt man es **quadratische Näherung** von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$ .

**Beispiel 2.10** Als weiteres Beispiel ist die quadratische Näherung der Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$  an der Stelle  $x_0 = 0$  gesucht.

Dazu benötigt man den Funktionswert, sowie den Wert der ersten und zweiten Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$ . Es gilt:  $f''(x) = f'(x) = f(x) = e^x$ , also  $f''(0) = f'(0) = f(0) = 1$ .

Damit sind die Koeffizienten  $a, b, c \in \mathbb{R}$  des Polynoms  $p(x) = ax^2 + bx + c$  zu bestimmen, sodass dieses mit den Werten von  $f$  an der Stelle  $x_0$  bis zur zweiten Ableitung übereinstimmt:

$$\begin{aligned} p(0) &= ax^2 + bx + c \Big|_{x_0=0} = c \stackrel{!}{=} f(0) = 1 \quad \rightarrow c = 1 \\ p'(0) &= 2ax + b \Big|_{x_0=0} = b \stackrel{!}{=} f'(0) = 1 \quad \rightarrow b = 1 \\ p''(0) &= 2a = c \stackrel{!}{=} f''(0) = 1 \quad \rightarrow a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit als quadratische Näherung der Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$  an der Stelle  $x_0 = 0$  das Polynom  $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ .

**Definition 2.11** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$  und  $f$  eine Funktion, die in der Umgebung von  $x_0$   $n$ -mal differenzierbar ist. Dann heißt

$$\begin{aligned} T_n(x) &:= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \end{aligned}$$

das **Taylor-Polynom** vom Grad  $n$  (bzw. der Ordnung  $n$ ) von  $f$  um  $x_0$ .

Für eine in der Umgebung von  $x_0$  unendlich oft differenzierbare Funktion  $f$  nennt man

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

die **Taylor-Reihe** von  $f$  um  $x_0$  (bzw. mit Entwicklungspunkt  $x_0$ ).

Bemerkungen:

- Das Taylor-Polynom  $T_n(x)$  vom Grad  $n$  von  $f$  um  $x_0$  ist genau das Polynom, bei dem an der Stelle  $x_0$  der Funktionswert und alle Ableitungen bis zur Ordnung  $n$  mit  $f$  übereinstimmen, d.h.

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \text{ für alle } 0 \leq k \leq n$$

- Sei  $f$  gegeben durch eine Potenzreihe  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ . Dann ist diese Potenzreihe die Taylor-Reihe von  $f$  um  $x_0$ , d.h.  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$
- Taylor-Reihen mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  werden auch als **MacLaurin-Reihe** bezeichnet
- Der Konvergenzradius einer Taylor-Reihe kann auch Null sein, sodass in diesem Fall die Taylor-Reihe nur im Entwicklungspunkt konvergiert.
- Ist die Taylor-Reihe konvergent (Konvergenzradius  $r > 0$ ), so muss sie nicht notwendigerweise gegen die ursprüngliche Funktion  $f$  konvergieren (vgl. Satz von Taylor).

### Beispiel 2.11

- (i) Betrachte die quadratische Näherung von  $f(x) = \cos(x)$  um  $x_0 = 0$ .

Es ist  $f'(x) = -\sin(x)$  und  $f''(x) = -\cos(x)$ , womit  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$  und  $f''(0) = -1$  folgt. Insgesamt erhält man für das Taylor-Polynom zweiter Ordnung:

$$T_2(x) = 1 + 0 + \frac{(-1)}{2!}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

- (ii) Betrachte die quadratische Näherung von  $f(x) = \sin(x)$ , wieder um  $x_0 = 0$ .

ES ist  $f'(x) = \cos(x)$  und  $f''(x) = -\sin(x)$ , womit  $f(0) = f''(0) = 0$  und  $f'(0) = 1$  folgt. Insgesamt erhält man für das Taylor-Polynom zweiter Ordnung

$$T_2(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 = x$$

In diesem Fall verschwindet der Koeffizient vor dem quadratischen Term, sodass  $T_2(x) = T_1(x)$  gilt. Der nächste Term tritt erst wieder bei der kubischen Näherung auf. Mit  $f'''(x) = -\cos(x)$  folgt  $f'''(0) = -1$ , also

$$T_3(x) = T_2(x) + \frac{(-1)}{3!}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3$$

- (iii) Nun soll die (vollständige) MacLaurin-Reihe von  $f(x) = \cos(x)$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  gefunden werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) & f'(x) &= -\sin(x) & f''(x) &= -\cos(x) & f'''(x) &= \sin(x) \\ f^{(4)}(x) &= \cos(x) & f^{(5)}(x) &= -\sin(x) & f^{(6)}(x) &= -\cos(x) & \dots & \end{aligned}$$

Damit folgt für die  $k$ -te Ableitung (mit  $f^{(0)}(x) = f(x)$ ) am Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ :

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ +1, & \text{falls } k \in \{0, 4, 8, 12, \dots\} \\ -1, & \text{falls } k \in \{2, 6, 10, 14, \dots\} \end{cases}$$

Dies lässt sich darstellen für  $l \in \mathbb{N}_0$ :  $f^{(2l)}(0) = (-1)^l$  und  $f^{(2l+1)}(0) = 0$ . Für die Taylor-Reihe gilt:

$$\begin{aligned} T(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \pm \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{mit Koeffizienten } a_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \frac{1}{k!}, & \text{falls } k \in \{0, 4, 8, 12, \dots\} \\ -\frac{1}{k!}, & \text{falls } k \in \{2, 6, 10, 14, \dots\} \end{cases} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l} \end{aligned}$$

#### Bemerkung:

Da alle Koeffizienten  $a_k$  der Potenzreihe für ungerade Indizes  $k$  verschwinden, ist die Darstellung in der letzten Zeile vorteilhaft. Es ist für diese Darstellung allerdings zu beachten, dass daraus die Entwicklungskoeffizienten  $a_l$  nicht unmittelbar abgelesen werden können. Insbesondere gilt  $a_l \neq \frac{(-1)^l}{(2l)!}$ , denn dies würde sich auf eine Taylor-Reihe bezüglich der Variable  $x^2$  beziehen, nicht aber auf die Variable  $x$  wie in  $T(x)$  angesetzt.

Dies ist insbesondere wichtig bei der Bestimmung des Konvergenzradius von  $T(x)$ . Das inverse Quotientenkriterium lässt sich auf die  $a_k$  nicht anwenden, da jeder zweite Koeffizient verschwindet, d.h. der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$  bezieht sich auf eine Folge der Art „ $(\infty, 0, \infty, 0, \infty, 0, \infty, \dots)$ “. Damit lässt sich nicht sinnvoll arbeiten.

Das inverse Wurzelkriterium bezieht sich für gerade Koeffizienten  $k$  auf eine sinnvolle Folge:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{k!}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k!} = \infty \quad (\text{für gerade } k)$$

Dies deutet auf einen Konvergenzradius von  $r = \infty$  hin. Formal sauber lässt sich der Konvergenzradius von

$$T(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l} = \sum_{l=0}^{\infty} b_l(x)$$

direkt mit dem Quotientenkriterium bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{l+1}(x)}{b_l(x)} \right| &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{l+1} \cdot x^{2l+2} \cdot (2l)!}{(2l+2)! \cdot (-1)^l \cdot x^{2l}} \right| \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2l+2)(2l+1)} = 0 < 1 \end{aligned}$$

Das Quotientenkriterium ist also unabhängig von  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt, d.h.  $r = \infty$  und  $K = \mathbb{R}$ .

- (iv) Als letztes Beispiel soll noch die (vollständige) MacLaurin-Reihe von  $f(x) = \sin(x)$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  gefunden werden. Dies könnte analog zum vorherigen Beispiel erfolgen, in dem  $k$ -te Ableitungen des Sinus betrachtet werden. Alternativ lässt sich per summandenweise Differentiation aus der MacLaurin-Reihe des Kosinus berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x) &= -\frac{d}{dx} \cos(x) = -\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot 2k \cdot x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius bleibt bei der Differentiation erhalten, dass es gilt  $r = \infty$  und  $K = \mathbb{R}$ .

#### Bemerkung:

Bei Berechnung der MacLaurin-Reihe des Sinus wurden einerseits der Kosinus mit seiner Reihenentwicklung  $T(x)$  gleichgesetzt, andererseits wurde das Ergebnis wiederum mit dem Sinus gleichgesetzt. Dies ist in der Tat möglich aufgrund des nachstehenden Satzes von Taylor:

#### **Satz 2.12** (Satz von Taylor)

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $f$  eine Funktion, die in der Umgebung von  $x_0$

$(n+1)$ -mal stetig differenzierbar ist, sowie  $T_n$  das Taylor-Polynom vom Grad  $n$  von  $f$  um  $x_0$ .

1. Es gibt eine Zahl  $z$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , so dass für das so genannte **Taylor-Restglied**  $R_n(x)$ , d.h. den „Approximationsfehler“, gilt:

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

2. Für alle  $x \in K$  (Konvergenzbereich der Taylor-Reihe  $T$  von  $f$  um  $x_0$ ) mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

gilt, dass die Funktion  $f$  für diese  $x$ -Werte durch die Taylor-Reihe dargestellt wird:

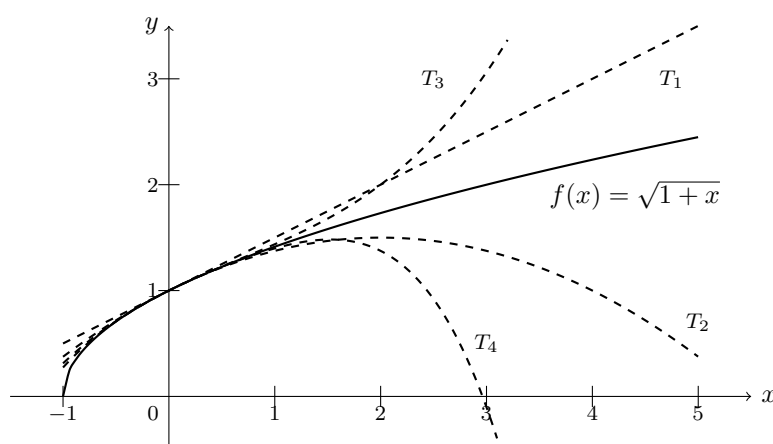
$$f(x) = T(x)$$

Bemerkung: Für sehr viele (die „allermeisten“) Funktionen aus der Praxis, die eine Taylor-Reihe besitzen, ist dies erfüllt.<sup>7</sup>

**Beispiel 2.12** Folgende Tabelle zeigt wichtige MacLaurin-Reihen und ihre Konvergenzradien  $r$ :

$f(x)$	$T(x)$	$r$
$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \dots$	$\infty$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \pm \dots$	$\infty$
$e^x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$	$\infty$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \pm \dots$	1
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$	1
$\sqrt{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{4^k(2k-1)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm \dots$	1

**Beispiel 2.13** In der folgenden Darstellung sind die Taylor-Polynome  $T_1$  bis  $T_4$  für die Funktion  $f(x) = \sqrt{1+x}$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  mit Konvergenzradius  $r = 1$  gezeigt.



$$T_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$T_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}$$

<sup>7</sup>Ein oft zitiertes Beispiel einer Funktion  $f$ , deren Taylor-Reihe existiert, die aber nicht gegen die Ausgangsfunktion konvergiert, lautet  $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$  für  $x \neq 0$  und  $f(0) = 0$ . Diese Funktion ist am Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  beliebig oft differenzierbar, allerdings verschwinden sämtliche Koeffizienten, d.h.  $a_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , sodass sich die Nullfunktion als Taylor-Reihe ergibt. Somit gilt  $T(x) = 0 \neq f(x)$  für alle  $x \neq 0$ .

**Beispiel 2.14** Zum Abschluss des Abschnitts zu Taylor-Reihen stehen noch drei (möglichst praxisnahe) Anwendungen im Fokus.

(i) Frage: Wie berechnet ein Taschenrechner  $\cos(1) = 0,540302305$  auf neun Nachkommastellen?

→ Mithilfe von Taylor-Polynomen und dem Satz von Taylor! Es gilt ( $r = \infty$ ):

$$\cos(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \pm \dots$$

Also gilt:

$$\cos(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} \pm \dots$$

Das Restglied zur Ordnung  $k$  ist:

$$|R_k(x)| = |\cos(x) - T_k(1)| = \frac{|f^{(k+1)}(z)|}{(k+1)!} \cdot x^{k+1} \quad (\text{für ein } z \text{ zwischen } x \text{ und } 1)$$

Für  $x = 1$  und der Abschätzung  $|f^{(k+1)}(z)| \leq 1$  folgt:

$$|R_k(1)| = |\cos(1) - T_k(1)| \leq \frac{1}{(k+1)!}$$

Die Fakultät ist eine sehr schnell anwachsende Funktion, sodass man schnell die kleinste Ordnung  $k$  finden kann, mit der die gewünschte Genauigkeit von  $10^{-10}$ , d.h. neun Nachkommastellen, erreicht wird:

$$\dots \quad (12+1)! \approx 0,6 \cdot 10^{10}, \quad (13+1)! \approx 8,7 \cdot 10^{10}$$

Das bedeutet, dass ab  $k = 13$  das Restglied klein genug wäre, allerdings gilt für den Kosinus (gerade Funktion)  $T_{12}(x) = T_{13}(x)$ , weshalb auf den nächsthöheren geraden Grade  $k = 14$  ausgewichen werden muss. Das zugehörige Taylor-Polynom

$$P_{14}(x) = \sum_{k=0}^{14} a_k x^k = \lim_{l=0}^7 \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l} = 1 - \frac{1}{2}x^2 \pm \dots + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!}$$

ist also ausreichend, um  $\cos(1)$  auf neun Nachkommastellen zu bestimmen:

$$\cos(1) \approx P_{14}(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{120} \pm \dots + \frac{1}{12!} - \frac{1}{14!} = 0, \underline{540302305} | 868 \dots$$

Unterstrichen sind die Dezimalen bis zur neunten Nachkommastelle, die mit dem korrekten Ergebnis von  $\cos(1)$  übereinstimmen. Tatsächlich war die für  $k = 14$  genutzte Abschätzung  $|f^{k+1}(z)| \leq 1$  nicht optimal, denn bereits das Taylor-Polynom  $T_{12}(x)$  führt zu einer ausreichenden Genauigkeit:

$$\cos(1) \approx P_{12}(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{120} \pm \dots + \frac{1}{12!} = 0, \underline{540302305} | 879 \dots$$

Hingegen ist  $P_{10}(x)$  nicht ausreichend, da

$$\cos(1) \approx P_{10}(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{120} \pm \dots - \frac{1}{10!} = 0, \underline{540302303} | 791 \dots$$

zu einer Abweichung an der neunten Nachkommastelle führt.



Bemerkung:

Für den Taschenrechner ist es ausreichend, den Kosinus im Bereich  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  durch Taylor-Polynome approximieren zu können. Alle anderen  $x \in \mathbb{R}$  lassen sich durch Ausnutzung von Symmetrie (S) oder  $2\pi$ -Periodizität (P) auf diesen Bereich bis zur ersten Nullstelle zurückführen, etwa

$$\cos(3) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \left(3 - \frac{\pi}{2}\right)\right) \stackrel{(S)}{=} -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(3 - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\cos(\pi - 3) = -0,989992496|\dots$$

- (ii) Taylor-Reihen bzw. Taylor-Polynome können bei der Berechnung von Grenzwerten hilfreich sein. Zwei Beispiele sollen dies illustrieren:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = ?}$$

Lösung 1: Verwendung von L'Hospital (Typ  $\frac{0}{0}$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Lösung 2: Nutzung der MacLaurin-Reihe von  $\cos(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} &= \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \pm \dots - 1\right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} - 1\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} x^{2k} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}x^4 \pm \dots \end{aligned}$$

Daher folgt für den Grenzwert:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad \checkmark$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = ?}$$

Lösung 1: Verwendung von L'Hospital?  $\rightarrow$  grundsätzlich möglich, aber aufwändig!

Lösung 2: Nutzung der MacLaurin-Reihe von  $\ln(1+q)$ . Es ist  $r=1$ , d.h. für alle  $|q| < 1$  gilt

$$\ln(1+q) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} q^k = q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} \pm \dots$$

Ist  $x$  groß genug (gesucht ist der Grenzwert für  $x \rightarrow \infty$ ), dann ist  $q := \frac{1}{x} < 1$  erfüllt, also gilt:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} \pm \dots$$

Für  $x$  groß genug ( $x \rightarrow \infty$ ) folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= x - x^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^k \\ &= x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^{k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{4x^2} \mp \dots \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \frac{1}{2} \quad \checkmark$

- (iii) Bestimmten Integrale  $\int_a^b f(x) dx$  können mittels Taylor-Approximation näherungsweise berechnet werden. Dieses Verfahren kommt vor allem dann zum Einsatz, wenn die Stammfunktion sehr schwierig oder gar nicht berechnet werden kann.

Für die reelle Funktion  $f(x) = \exp(ax^2)$  kann für  $a \neq 0$  keine analytische Stammfunktion angegeben werden. Für die näherungsweise Bestimmung von

$$I = \int_0^1 \exp(-x^2) dx$$

werden daher Taylor-Approximationen des Integranden herangezogen. Mithilfe der MacLaurin-Reihe der Exponentialfunktion ( $r = \infty$ )

$$\exp(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} q^k = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3 + \dots$$

ergibt sich mit  $q := -x^2$  folgende Reihendarstellung:

$$\exp(-x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x^2)^k = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 \pm \dots$$

Mit den Taylor-Polynomen  $T_2, T_4, T_6$  erhält man als Taylor-Näherungen für das Integral  $I$ :

$$\begin{aligned} I &\approx I_2 = \int_0^1 T_2(x) dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3} = 0,6666\dots \\ I &\approx I_4 = \int_0^1 T_4(x) dx = \int_0^1 \left( 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \frac{23}{30} = 0,7666\dots \\ I &\approx I_6 = \int_0^1 T_6(x) dx = \int_0^1 \left( 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 \right) dx = \frac{26}{35} = 0,7428\dots \end{aligned}$$

Der tatsächliche Wert des Integrals lautet  $I = 0,746824\dots$ . In den obigen Ergebnissen sind die Dezimalen unterstrichen, sofern sie mit denen des tatsächlichen Werts übereinstimmen. Je höher der Grad  $n$  des approximierenden Polynoms ist, umso besser ist die Übereinstimmung zwischen dem tatsächlichen Integralwert  $I$  und dessen Taylor-Näherung  $I_n$ .

## 2.3 Fourier-Reihen

Im vorherigen Kapitel konnten (bestimmte) Funktionen *lokal* approximiert werden durch Taylor-Polynome/Taylor-Reihen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

In diesem Kapitel möchte man (bestimmte) Funktionen *global* approximieren durch so genannte trigonometrische Polynome/Fourier-Reihen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

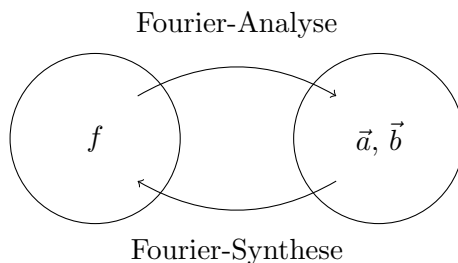
Dabei sind  $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  und  $\vec{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots)$  die Entwicklungskoeffizienten (vgl. bei Taylor mit  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ ).

Die Darstellung entspricht einer Zerlegung von  $f$  in harmonische Grundschwingungen ( $n = 1$ ) sowie Oberschwingungen ( $n \geq 2$ ):

→ Grundschwingungen:  $\cos(\omega x)$  und  $\sin(\omega x)$

→ Oberschwingungen:  $\cos(2\omega x)$ ,  $\sin(2\omega x)$ ,  $\cos(3\omega x)$ ,  $\sin(3\omega x)$ , ...

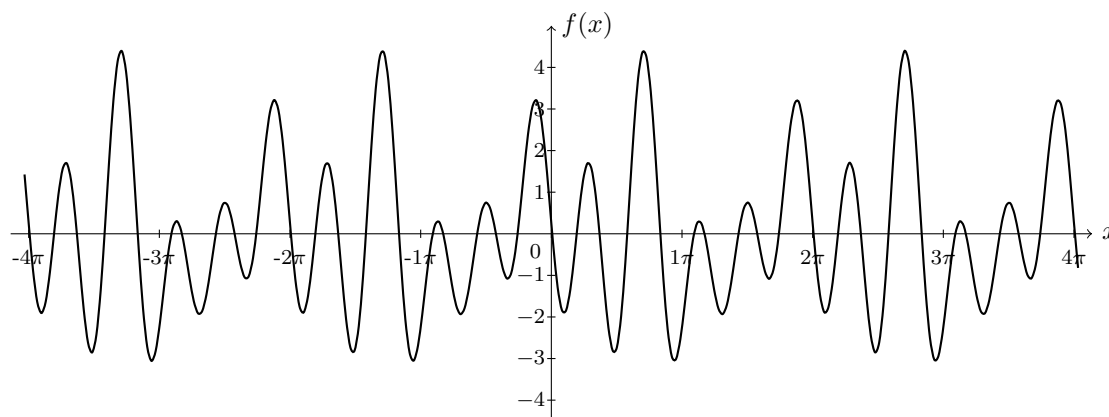
Das Zusammensetzen der Funktion  $f$  aus den Entwicklungskoeffizienten  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  bezeichnet man als **Fourier-Synthese**. Die umgekehrte Richtung, also die Bestimmung der Koeffizienten für eine gegebene Funktion  $f$  bezeichnet man als **Fourier-Analyse**.



**Beispiel 2.15** Es seien die ersten Fourier-Koeffizienten gegeben durch

$$\vec{a} = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}, -1, 0, \dots) \quad \text{und} \quad \vec{b} = (0, \frac{1}{4}, -1, 0, 0, -2, \dots)$$

Alle anderen Koeffizienten verschwinden, d.h.  $a_n = b_n = 0$  für alle  $n \geq 6$ . Die Fourier-Synthese für  $\omega = 1$  ergibt sich als Summe von je drei Kosinus- sowie drei Sinus-Funktionen.



### Wichtige Fakten zu periodischen Funktionen

1. Die Definition 1.15 aus der Vorlesung „Ingenieurmathematik 1“ enthält:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt periodisch mit Periode  $p > 0$ , falls für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $f(x + p) = f(x)$ .  
Man sagt auch, dass  $f$   $p$ -periodisch ist.

2. Folgende Eigenschaften gelten für  $p$ -periodische Funktionen:

- i) Behauptung: Ist  $f$   $p$ -periodisch, so ist  $f$  auch  $(n \cdot p)$ -periodisch für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Begründung: Eine wiederholte Nutzung der  $p$ -Periodizität von  $f$  ergibt:

$$\begin{aligned} f(x + n \cdot p) &= f(x + (n - 1) \cdot p + p) \\ &= f(x + (n - 1) \cdot p) = f(x + (n - 2) \cdot p + p) \\ &= f(x + (n - 2) \cdot p) = f(x + (n - 3) \cdot p + p) \\ &= \dots \text{ (} n \text{-mal)} \\ &= f(x + 0 \cdot p) = f(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

- ii) Behauptung: Linearkombinationen von  $p$ -periodischen Funktionen sind  $p$ -periodisch.

Begründung: Sind  $f_1, \dots, f_n$   $p$ -periodische Funktionen (P) und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , so ist die Linearkombination  $f$  gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x)$$

Diese ist  $p$ -periodisch, denn

$$f(x + p) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x + p) \stackrel{(P)}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) = f(x) \quad \checkmark$$

3. Bezüglich Festlegung von periodischen Funktionen gilt ferner:

- i) Behauptung: Eine  $p$ -periodische Funktion  $f$  ist durch die Werte auf einem beliebigen Intervall der Länge  $p$  bereits festgelegt.

Insbesondere lässt sich eine auf  $[0, p)$  definierte Funktion  $f$  in eindeutiger Weise auf eine  $p$ -periodische Funktion  $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fortsetzen. Diese wird als **periodische Fortsetzung** von  $f$  bezeichnet.

Begründung: Ist für  $a \in \mathbb{R}$  und  $p > 0$  die Funktion  $f : [a, a + p) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, so lässt sich jedes  $x \in \mathbb{R}$  eindeutig zerlegen in

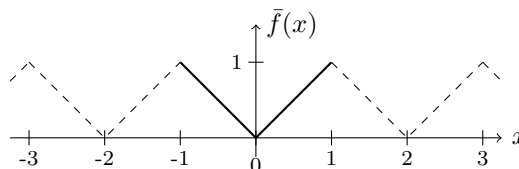
$$x = x_0 + n \cdot p$$

für ein  $n \in \mathbb{Z}$  und  $x_0 \in [a, a + p)$ . Dadurch definiert sich die periodische Fortsetzung als

$$\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = x_0 + n \cdot p \mapsto \bar{f}(x) := f(x_0) \quad \checkmark$$

**Beispiel 2.16** Betrachte die (eingeschränkte) Betragsfunktion  $f : [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = |x|$ . Es ist  $a = -1$  in obiger Schreibweise sowie  $p = 2$ .

Die periodische Fortsetzung  $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\bar{f}(x) = f(x_0)$  für die eindeutige Zerlegung  $x = x_0 + n \cdot 2$ .



Zur Illustration ergeben sich folgende Auswertungen der periodischen Fortsetzung:

$$\bar{f}(2) = f(0) = 0, \text{ denn } 2 = \underline{0} + 1 \cdot 2$$

$$\bar{f}(1) = f(-1) = 1, \text{ denn } 1 = \underline{-1} + 1 \cdot 2$$

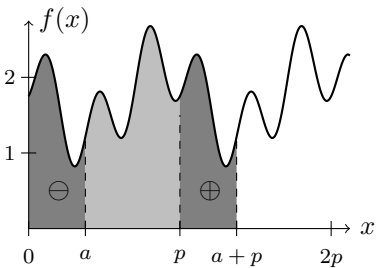
$$\bar{f}(-3) = f(-1) = 1, \text{ denn } 2 = \underline{-1} - 1 \cdot 2$$

ii) Behauptung: Ist  $f$  eine  $p$ -periodische Funktion, dann ist das Integral über jedes Intervall der Länge  $p$  identisch, d.h. für jedes  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

$$I = \int_0^p f(x) dx = \int_a^{a+p} f(x) dx$$

Begründung:

In nebenstehender Skizze fällt aufgrund der verschobenen unteren Integrationsgrenze ein Flächenabschnitt weg ( $\ominus$ ), der aber aufgrund der verschobenen oberen Integrationsgrenze und der Periodizität von  $f$  exakt kompensiert wird ( $\oplus$ ). Die bestimmten Integrale sind also gleich.



4. Es gelten für  $k, l \in \mathbb{N}$  und  $p > 0$  die nachstehenden Integralidentitäten ( $\omega := \frac{2\pi}{p}$ ):

- i)  $\int_0^p \cos(k\omega x) \sin(l\omega x) dx = 0$
- ii)  $\frac{2}{p} \int_0^p \cos(k\omega x) \cos(l\omega x) dx = \delta_{kl}$
- iii)  $\frac{2}{p} \int_0^p \sin(k\omega x) \sin(l\omega x) dx = \delta_{kl}$

In der Notation wurde das **Kronecker-Delta**  $\delta_{kl}$  genutzt mit  $\delta_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \\ 1, & \text{falls } k = l \end{cases}$ .

Bemerkung:

- Die Funktionen  $\cos(k\omega x)$  und  $\sin(k\omega x)$  in den Integranden der Integralidentitäten sind für alle  $k \in \mathbb{N}$   $p$ -periodische Funktionen. Daher kann anstelle des Intervalls  $[0, p]$  auch über das Intervall  $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$  oder  $[-\frac{p}{4}, \frac{3p}{4}]$  oder jedes andere Intervall der Länge  $p$  integriert werden.
- Die angegebenen Integralidentitäten können aus den Ergebnissen aus Aufgabe 4 des Projekts A.1 mit Hilfe der Substitution  $y = \omega x$  gefolgert werden.

Beispielsweise erhält man aus dem Projekt für

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ky) \cos(ky) dy = \delta_{kl}$$

aufgrund der  $2\pi$ -Periodizität des Integranden und der obigen Substitution:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(ky) \cos(ly) dy \quad (\text{Subst: } y = \omega x, dy = \omega dx) \\ &= \frac{2}{p} \int_0^p \cos(k\omega x) \cos(l\omega x) dx = \delta_{kl} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Gerüstet mit den notwendigen Werkzeugen zur Arbeit mit periodischen Funktionen stellt sich als nächster Schritt die zentrale Frage der Fourier-Analyse:

Wie lassen sie die Koeffizienten  $\vec{a}, \vec{b}$  aus einer gegebenen Funktion  $f$  bestimmen?

Zur Motivation der nachstehenden allgemeinen Definition von  $a_n$  und  $b_n$  betrachte das folgende Beispiel einer  $p$ -periodischen Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Koeffizienten für gegebene Konstanten  $A, B, C \in \mathbb{R}$  direkt abzulesen sind (wieder  $\omega = \frac{2\pi}{p}$ ):

$$f(x) = \frac{A}{2} + B \cos(4\omega x) + C \sin(3\omega x)$$

Es ergibt sich direkt

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (A, 0, 0, 0, B, 0, \dots) \quad \text{d.h. } a_0 = A, a_4 = B \\ \vec{b} &= (0, 0, 0, C, 0, \dots) \quad \text{d.h. } b_3 = C \end{aligned}$$

während alle anderen Koeffizienten verschwinden. Die Frage ist, wie sich mit einem allgemeinen Verfahren, diese Koeffizienten bestimmen lassen.

Idee: Man könnte für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  die Funktion mit einem zusätzlichen Faktor  $\cos(n\omega x)$  über eine volle Periode  $p$  integrieren. Angewandt auf das betrachtete Beispiel erhält man:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_0^p f(x) \cos(n\omega x) dx \\ &= \int_0^p \frac{A}{2} \cos(n\omega x) dx + \int_0^p B \cos(4\omega x) \cos(n\omega x) dx + \int_0^p C \sin(3\omega x) \cos(n\omega x) dx \end{aligned}$$

Man findet für die drei Integrale elementar oder mithilfe der Integralidentitäten für periodische Funktionen:

1. Integral

$$\int_0^p \frac{A}{2} \cos(n\omega x) dx = \begin{cases} A \cdot \frac{p}{2}, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{falls } n \neq 0 \end{cases}$$

2. Integral

$$\int_0^p B \cos(4\omega x) \cos(n\omega x) dx = \begin{cases} B \cdot \frac{p}{2}, & \text{falls } n = 4 \\ 0, & \text{falls } n \neq 4 \end{cases}$$

3. Integral

$$\int_0^p C \sin(3\omega x) \cos(n\omega x) dx = 0$$

Der Integralwert ergibt sich sofort aus der ungeraden Symmetrie des Integranden  $\sin(3\omega x) \cos(n\omega x)$ .

Ergebnisse der Idee: Im ersten und zweiten Integral lassen sich  $A$  (für  $n = 0$ ) sowie  $B$  (für  $n = 4$ ) mithilfe des zusätzlichen Faktors  $\cos(n\omega x)$  aus  $f$  „herausfiltern“. Bis auf einen Faktor  $\frac{p}{2}$  liefern die Integrale die gesuchten Koeffizienten  $a_0$  und  $a_4$ . Allerdings lässt sich mit dieser Idee keine Aussagen über die  $b_n$  treffen, wie im dritten Integral exemplarisch gezeigt.

Eine weitere Idee: Man könnte für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  die Funktion mit einem zusätzlichen Faktor  $\sin(n\omega x)$

über eine volle Periode  $p$  integrieren. Angewandt auf das betrachtete Beispiel erhält man:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_0^p f(x) \sin(n\omega x) dx \\ &= \int_0^p \frac{A}{2} \sin(n\omega x) dx + \int_0^p B \cos(4\omega x) \sin(n\omega x) dx + \int_0^p C \sin(3\omega x) \sin(n\omega x) dx \end{aligned}$$

Dieses Mal erhält man aufgrund der ungeraden Symmetrie der Integranden einen Integralwert von Null für die ersten beiden Summanden. Für den letzten Summanden gilt:

#### 4. Integral

$$\int_0^p C \sin(3\omega x) \sin(n\omega x) dx = \begin{cases} C \cdot \frac{p}{2}, & \text{falls } n = 3 \\ 0, & \text{falls } n \neq 3 \end{cases}$$

Ergebnisse der weiteren Idee: Mithilfe des zusätzlichen Faktor  $\sin(n\omega x)$  lässt sich auch  $C$  (für  $n = 3$ ) aus  $f$  „herausfiltern“. Wieder liefert das Integral bis auf einen Faktor  $\frac{p}{2}$  den gesuchten Koeffizienten  $b_3$ . Dieses Mal lässt sich aber keine Aussagen über die  $a_n$  treffen.

**Definition 2.13** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine periodische Funktion mit Periodenlänge  $p > 0$ , die auf  $[0, p]$  integrierbar ist. Ferner sei  $\omega := \frac{2\pi}{p}$ .

Dann nennt man für  $n \in \mathbb{N}_0$  die Zahlen  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  mit

$$a_n := \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos(n\omega x) dx \quad \text{und} \quad b_n := \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin(n\omega x) dx$$

die **Fourier-Koeffizienten** von  $f$  (stets mit  $b_0 = 0$ ). Die mit den Fourier-Koeffizienten von  $f$  gebildete Funktionenreihe

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

heißt **Fourier-Reihe** von  $f$ . Ihre ersten Summanden lauten

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega x) + b_1 \sin(\omega x) + a_2 \cos(2\omega x) + b_2 \sin(2\omega x) + \dots$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  werden die Partialsummen (Fourier-Approximationen)

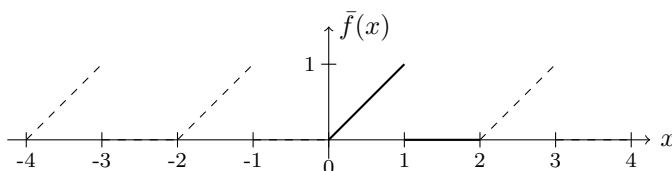
$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$$

als **trigonometrische Polynome** vom Grad  $n$  bezeichnet.

**Beispiel 2.17** Gesucht ist die Fourier-Reihe (d.h. die Entwicklungskoeffizienten  $\vec{a}, \vec{b}$ ) der periodischen Fortsetzung  $\bar{f}$  von  $f : [0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{falls } x \in (1, 2) \end{cases}$$

$\Rightarrow \bar{f}$  ist periodisch mit Periode  $p = 2$ , also gilt  $\omega = \pi$ .



Für  $n \neq 0$  ergibt sich mithilfe der Substitution  $y = n\pi x$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{p}{2} \int_0^p f(x) \cos(n\omega x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) \cos(n\pi x) dx = \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{(n\pi)^2} \int_0^{n\pi} y \cos(y) dy = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\frac{2}{n^2\pi^2}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei wurde die Stammfunktion  $\int y \cos(y) dy = y \sin(y) + \cos(y) + c$  verwendet.

Für den die konstante Verschiebung der Fourier-Reihe relevanten Koeffizienten ( $n = 0$ ) ergibt sich:

$$a_0 = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{1}{2}$$

Ferner gilt immer  $b_0 = 0$  sowie für alle  $n \neq 0$  mit einer analogen Rechnung:

$$b_n = \frac{p}{2} \int_0^p f(x) \sin(n\omega x) dx = \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \dots = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Damit erhält man für die gesuchte Fourier-Reihe ( $\omega = \pi$ ):

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x))$$

$$\text{mit } a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\frac{2}{n^2\pi^2}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und } b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad (n \in \mathbb{N})$$

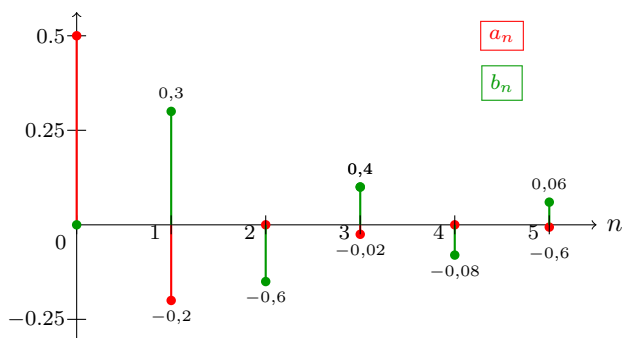
Schreibt man die Entwicklungskoeffizienten explizit aus, so erhält man

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left( \frac{1}{2}, -\frac{2}{\pi^2}, 0, -\frac{2}{9\pi^2}, 0, -\frac{2}{25\pi^2}, \dots \right) \\ \vec{b} &= \left( 0, \frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, -\frac{1}{4\pi}, \frac{1}{5\pi}, \dots \right) \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe ausgeschrieben bis zur vierten Oberschwingung ( $n = 5$ ) lautet:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi x) + \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \\ &+ 0 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) \\ &- \frac{2}{9\pi^2} \cos(3\pi x) + \frac{1}{3\pi} \sin(3\pi x) \\ &+ 0 - \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi x) \\ &- \frac{2}{25\pi^2} \cos(5\pi x) + \frac{1}{5\pi} \sin(5\pi x) \pm \dots \end{aligned}$$

Das so genannte **Fourier-Spektrum** kann aus dem Ergebnis der Fourier-Analyse erstellt werden (siehe rechts). Manchmal wird auch das **Energie-Spektrum** (power spectrum) mit  $|a_n|^2$  und  $|b_n|^2$  gezeigt, da dieses direkte Informationen über die in einer (Ober)schwingung enthaltenen Energie enthält.





**Satz 2.14** (Rechentechnik für Fourier-Reihen)

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $p$ -periodische Funktion mit  $p > 0$  und  $\omega = \frac{2\pi}{p}$ .

1. Zur Berechnung der **Fourier-Koeffizienten**  $a_n, b_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) kann ein **beliebiges Intervall der Länge  $p$**  verwendet werden.

*Bemerkung:* Oft wird über  $[0, p]$  oder  $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$  integriert.

2. Ist  $f$  **gerade** (achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse, d.h.  $f(-x) = f(x)$ ), dann gilt vereinfachend für die Fourier-Koeffizienten:

$$a_n = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) \cos(n\omega x) dx \quad \text{und} \quad b_n = 0 \quad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}_0)$$

3. Ist  $f$  **ungerade**, (punktsymmetrisch zum Ursprung, d.h.  $f(-x) = -f(x)$ ), dann gilt vereinfachend für die Fourier-Koeffizienten:

$$a_n = 0 \quad \text{und} \quad b_n = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) \sin(n\omega x) dx \quad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}_0)$$

Begründungen der Rechentechniken:

ad 1. Da für  $p$ -periodische  $f$  die beiden Funktionen  $\cos(n\omega x)$  und  $\sin(n\omega x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  wieder  $p$ -periodisch sind, kann das Faktum 3.ii) über periodische Funktionen angewandt werden.

ad 2. Ist  $f$  gerade, so ist das Produkt  $f(x) \sin(n\omega x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  eine ungerade Funktion, also:

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin(n\omega x) dx = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \underbrace{f(x) \sin(n\omega x)}_{\text{ungerade Funktion}} dx = 0 \quad \checkmark$$

Ferner ist dann das Produkt  $f(x) \cos(n\omega x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  eine gerade Funktion, also:

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos(n\omega x) dx = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \underbrace{f(x) \cos(n\omega x)}_{\text{gerade Funktion}} dx = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) \cos(n\omega x) dx \quad \checkmark$$

ad 3. Die Rechentechnik für ungerade Funktionen begründet sich analog zur Rechentechnik für gerade Funktionen: Ist  $f$  ungerade, so ist für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  das Produkt  $f(x) \sin(n\omega x)$  gerade und das Produkt  $f(x) \cos(n\omega x)$  ungerade. Aus letzterem folgt insbesondere  $a_n = 0$ .

**Satz 2.15** (Konvergenz von Fourier-Reihen)

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $p$ -periodische Funktion mit  $p > 0$ , sodass gilt:

$f$  ist auf  $[0, p]$  bis auf endlich viele Ausnahmestellen stetig differenzierbar und in jedem der endlich vielen Ausnahmestellen existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von  $f$  und  $f'$ .

Dann konvergiert die Fourier-Reihe  $F$  von  $f$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  mit

$$F(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)),$$

wobei  $f(x^-)$  bzw.  $f(x^+)$  den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x$  bezeichnet.

Insbesondere gilt  $f(x) = F(x)$  für alle Stetigkeitsstellen  $x \in \mathbb{R}$ .

## Bemerkungen

- Die Voraussetzungen aus dem Satz beschreiben Funktionen, die man **stückweise stetig differenzierbar** nennt. Zulässig sind Unstetigkeitsstellen mit endlicher Sprunghöhe, Knicke, aber keine Pole.
- Die Funktion  $f$  wird an den Stellen, an denen sie stetig ist, durch ihre Fourier-Reihe dargestellt. An den Unstetigkeitsstellen konvergiert ihre Fourier-Reihe gegen das arithmetische Mittel des links- sowie rechtsseitigen Grenzwertes an dieser Stelle. Dies entspricht gerade der halben Sprunghöhe.

**Beispiel 2.18** Man betrachte erneut das vorherigen Beispiels der periodischen Fortsetzung  $\bar{f}$  von  $f : [0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x$  für  $x \in [0, 1]$  und  $f(x) = 0$  für  $x \in (1, 2)$ .

Die periodische Fortsetzung  $\bar{f}$  ist in einer vollen Periode  $[0, p] = [0, 2]$  überall stetig, ausgenommen für  $x = 1$ . Die Unstetigkeitsstellen bilden die Menge  $U := \{x = 1 + 2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Für alle  $x \in U$  existiert ein endlicher Sprung von 1 auf 0, d.h. die Fourier-Reihe der Funktion  $\bar{f}$  konvergiert gegen die reelle Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(x) = \begin{cases} \bar{f}(x), & \text{falls } x \notin U \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x \in U \end{cases}$$

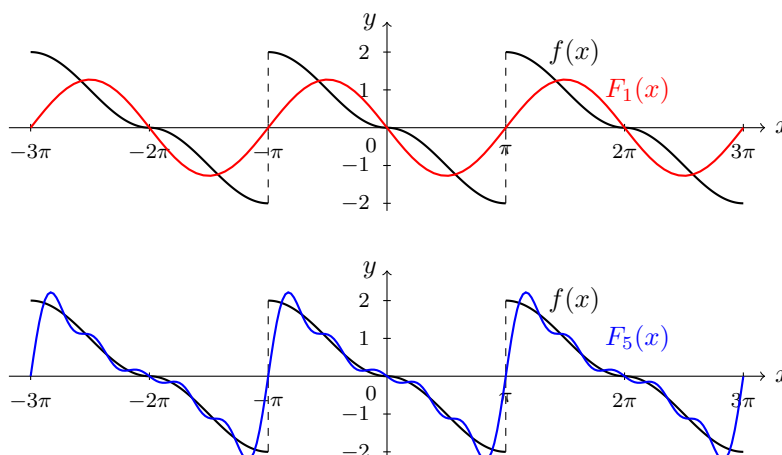
Der Funktionswert an den Unstetigkeitsstellen  $x \in U$  ergibt sich als halbe Sprunghöhe:

$$x \in U \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2}(\bar{f}(x^-) + \bar{f}(x^+)) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$$

**Beispiel 2.19** Als abschließendes Beispiel der (globalen) Konvergenz von Fourier-Reihen und einem Vergleich mit der (lokalen) Konvergenz von Taylor-Reihen betrachte man die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche gegeben ist durch

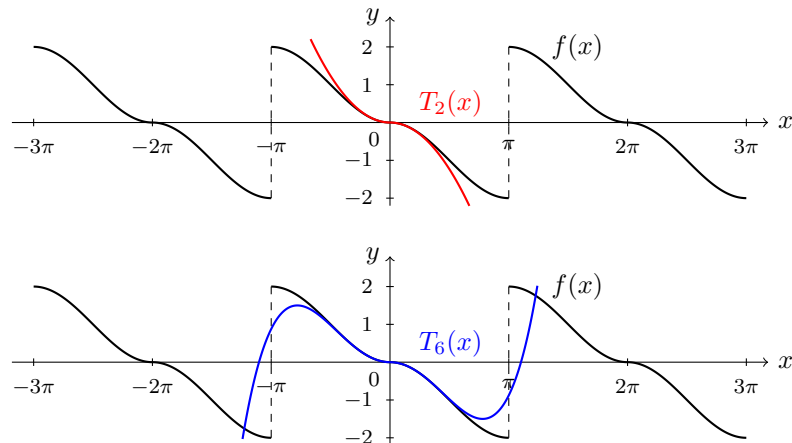
$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos(x), & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ \cos(x) - 1, & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

In nachstehenden Plots sind die Fourier-Approximationen  $F_1$  und  $F_5$  gezeigt; eine detaillierte Berechnung ist in den Übungsaufgaben enthalten. Es lässt sich dabei in der Nähe der Unstetigkeitsstellen das so genannte **Gibbs'sche Phänomen**<sup>8</sup> beobachten: Die Fourier-Approximationen besitzen in der Nähe von Unstetigkeitsstellen eine Überschwingung von ca. 18% der Sprunghöhe. Diese Überschwingung bleibt für sämtliche Partialsummen  $F_n$  erhalten und verschwindet erst für  $n \rightarrow \infty$  in der vollständigen Fourier-Reihe  $F$ .



<sup>8</sup>Für eine mathematische Diskussion sei auf die entsprechende Literatur verwiesen.

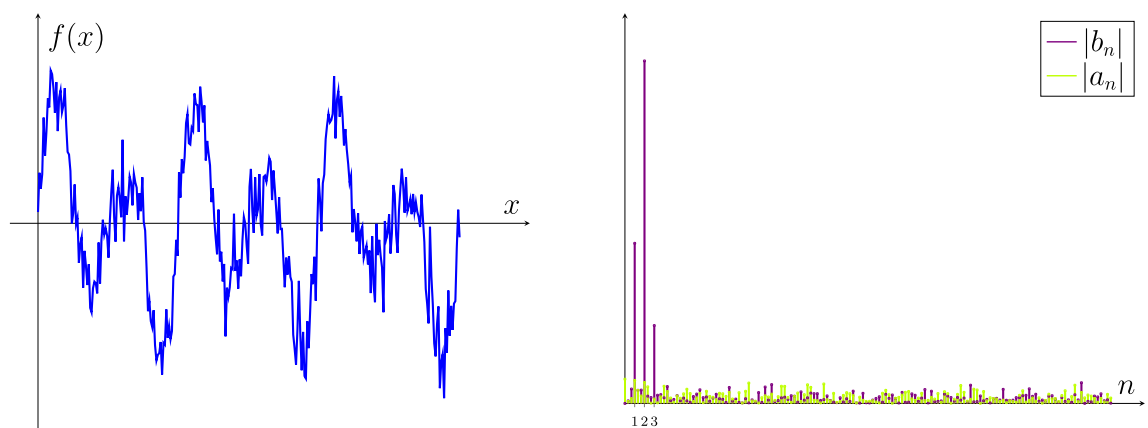
Im Vergleich mit Taylor-Approximationen zeigen sich die Unterschiede zwischen einer globalen sowie einer lokalen Näherung. In den beiden nachstehenden Plots sind die Taylor-Polynome  $T_2$  sowie  $T_6$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  gezeigt. Die lokale Informationen über Funktionswert, Ableitung, etc. direkt am Entwicklungspunkt ermöglicht eine sich verbessernde Approximation nur im engen Umfeld  $x \in (-\pi, \pi)$ . Außerhalb dieses Bereichs kann die Funktion  $f$  mithilfe von Taylor-Polynomen nicht dargestellt werden.



### Anwendungen von Fourier-Reihen

Es existieren äußerst viele Anwendungsgebiete von Fourier-Reihen bzw. der noch etwas allgemeineren mathematischen Disziplin der Fourier-Analyse (nicht zu verwechseln mit Fourier-Analyse). Eine adäquate Behandlung dieser Thematik befindet sich außerhalb der Möglichkeiten dieser einführenden Vorlesung. Neben der allgegenwärtigen Digitaltechnik, wozu Telefonate unter Nutzung von VoIP (Voice over IP) unterschiedlichster Anbieter als auch gängige Medienformate wie MP3 oder JPEG gehören, können viele Fragestellungen aus der Elektrotechnik (z.B. Beschreibung von Hochpass oder Tiefpass) mithilfe von Methoden der Fourier-Analyse untersucht und beschrieben werden.

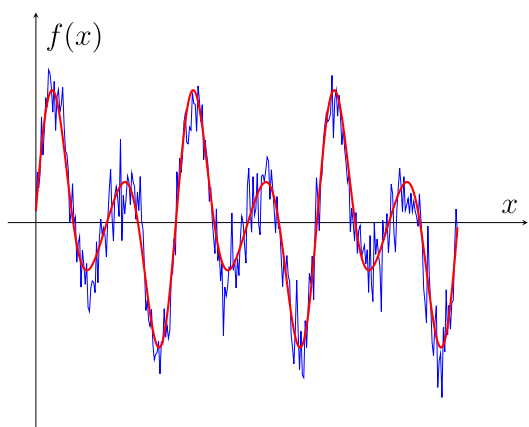
Konkret betrachte man folgendes Beispiel zur Entrauschung von Signalen. Das in Panel (a) gezeigt Signal ist verrauscht, was sich im Fourier-Spektrum in Panel (b) durch eine Vielzahl von kleinen Beiträgen auch hoher Frequenzen  $n\omega$  zeigt. Das wesentliche Signal hingegen ist durch wenige Frequenzen ( $a_n$  und  $b_n$  für  $n \leq 3$ ) gegeben.



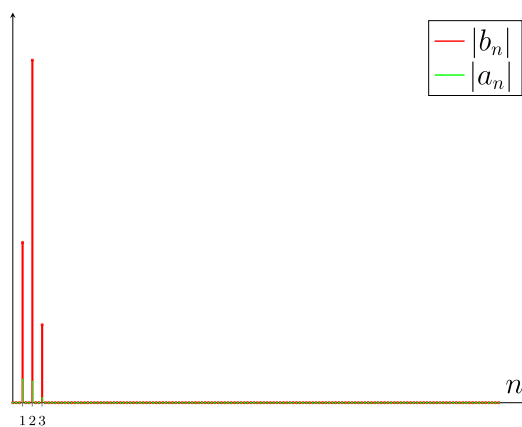
(a) Verrauschtes Inputsignal

(b) Fourier-Spektrum des Inputs

Beschränkt man sich auf diese wenigen Frequenzen und schneidet höhere Frequenzen ab, so erhält man das in Panel (d) gezeigte Fourier-Spektrum. Dessen Fourier-Synthese ist in Panel (c) zusätzlich zum verrauschten Inputsignal gezeigt. Die wesentliche Form des Signals kann damit beschrieben werden, störendes Rauschen durch hohe Frequenzen sind nicht mehr vorhanden. In der Elektrotechnik lässt lässt sich ein solches Abschneiden hoher Frequenzen durch einen analogen Tiefpass in sehr guter Näherung realisieren.



(c) Entraushtes Outputsignal



(d) Fourier-Spektrum des Outputs

#### Bemerkungen zu Fourier-Reihen im Komplexen

In der Literatur findet man anstelle von zwei Folgen von Entwicklungskoeffizienten  $a_n \in \mathbb{R}$  und  $b_n \in \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) häufig komplexe Koeffizienten  $c_n \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Diese finden sich nicht nur in der reinen Mathematik sondern auch in angewandten Disziplinen wieder, da sie eine elegante und kurze Darstellung von Fourier-Reihen ermöglichen.

Für eine  $p$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind sie definiert als ( $\omega = \frac{2\pi}{p}$ ):

$$c_n = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) e^{-in\omega x} dx$$

Erinnert man sich für allgemeines  $z \in \mathbb{C}$  an die Berechnung von Real- und Imaginärteil via

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c_n) &= \frac{1}{p} \int_0^p f(x) \cdot \frac{1}{2}(e^{-in\omega x} + e^{+in\omega x}) dx \\ &= \frac{1}{p} \int_0^p f(x) \cdot \cos(n\omega x) dx = \frac{1}{2} a_n \\ \operatorname{Im}(c_n) &= \frac{1}{p} \int_0^p f(x) \cdot \frac{1}{2i}(e^{-in\omega x} - e^{+in\omega x}) dx \\ &= \frac{1}{p} \int_0^p f(x) \cdot (-\sin(n\omega x)) dx = -\frac{1}{2} b_n \end{aligned}$$

Insgesamt lassen sich die komplexen Fourier-Koeffizienten zerlegen in einen Real- und Imaginärteil, die jeweils nur von den zuvor eingeführten Entwicklungskoeffizienten  $a_n$  bzw.  $b_n$  abhängen:

$$c_n = \operatorname{Re}(c_n) + i \operatorname{Im}(c_n) = \frac{1}{2}a_n - \frac{i}{2}b_n$$

Sind die (komplexen) Fourier-Koeffizienten bekannt, so berechnet sich die Fourier-Reihe als

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$$

Diese Darstellung wird oft als kurz und elegant betrachtet, da im Gegensatz zur Darstellung mittels  $a_n$  und  $b_n$  nicht explizit zwischen  $x$ -unabhängigem Summand  $\frac{a_0}{2}$  und den beiden separaten Summen der  $\cos(\cdot)$  und  $\sin(\cdot)$  in der Notation unterschieden werden muss. Wie nachstehende Rechnung zeigt, sind die Darstellungen aber in der Tat identisch:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n (\cos(n\omega x) + i \sin(n\omega x)) + c_{-n} (\cos(n\omega x) - i \sin(n\omega x))] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Dabei wurden im letzten Schritt die Koeffizienten  $c_n$  und  $c_{-n}$  in Real- und Imaginärteil explizit ausgeschrieben und zum Endergebnis zusammengefasst. Dieses ist genau die Darstellung der Fourier-Reihen wie sie für die reellen Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  eingeführt worden sind.

### 3 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

#### 3.1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

**Definition 3.1** Eine **reellwertige Funktion  $f$  mit  $n$  Variablen (Veränderlichen)** ist eine Vorschrift, die jedem  $n$ -Tupel  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$  genau eine reelle Zahl  $y$  zuordnet. Dabei ist  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  der **Definitionsbereich** von  $f$ .

Dieses so genannte **Skalarfeld** schreibt man als:

$$f : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & y = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

oder

$$y = f(x_1, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in D$$

Es ist

$$W := \{f(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in D\} \subseteq \mathbb{R}$$

die **Wertemenge** (oder das **Bild**) von  $f$  und

$$G := \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

der **Graph** von  $f$ .

Sind die Funktionswerte Vektoren des  $\mathbb{R}^m$ , dann spricht man von **vektorwertigen Funktionen** oder **Vektorfeldern**:

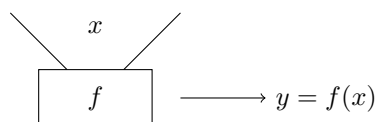
$$f : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \vec{y} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Komponenten von  $f(\vec{x})$  sind dabei Skalarfelder auf  $D$ . Für den Graph eines Vektorfelds gilt  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ .

Zur Illustration

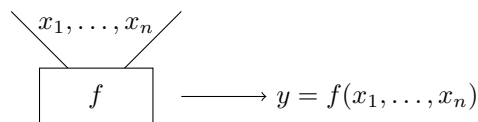
1) reelle Funktion einer Variablen

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



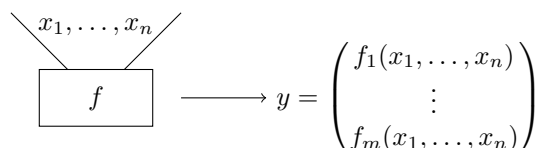
2) reelle Funktion mehrerer Variablen

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Skalarfeld})$$



3) vektorwertige Funktion mehrerer Variablen)

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (\text{Vektorfeld})$$



Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Darstellung für Funktionen mehrerer Veränderlicher:

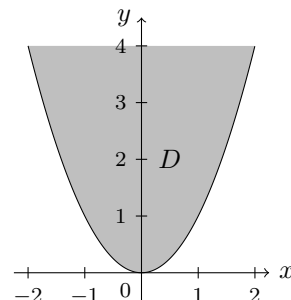
- analytisch: explizit, implizit, Parameterdarstellung (siehe nachstehende Details)

- tabellarisch: Darstellung nicht vollständig, wenn  $D$  kontinuierlich oder unendlich
- graphisch: mit 3D-Plots sind Skalarfelder von zwei Variablen sowie mit 4D-Plots (zeitlich veränderlicher Plot  $\rightarrow$  Film) von drei Variablen möglich. Ferner lassen sich Vektorfelder in  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  mittels Vektorpfeile auf einem Gitter darstellen. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit der Farbcodierung (vgl. Darstellung der Graphen komplexer Funktion  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ).

### Bemerkung zur analytischen Darstellung

#### 1. explizite Darstellung

Bei einer expliziten Darstellung ist die Funktionsgleichung nach der abhängigen Variable aufgelöst:  
z.B.  $z = f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$  mit maximalem Definitionsbereich  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$



#### 2. implizite Darstellung

Bei einer impliziten Darstellung ist der Zusammenhang zwischen den Variablen durch eine Gleichung  $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$  gegeben, z.B.

$$F(x, y, z) = z^4 - 2x^2 - y^4 - 1 = 0 \quad \text{für } z \leq 0 \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist eine implizite Darstellung zwischen den unabhängigen Variablen  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und der abhängigen Variable  $z \leq 0$ . Es ist in diesem Fall möglich, die implizite Darstellung in eine explizite umzuschreiben:

$$z = -\sqrt[4]{2x^2 + y^4 + 1}$$

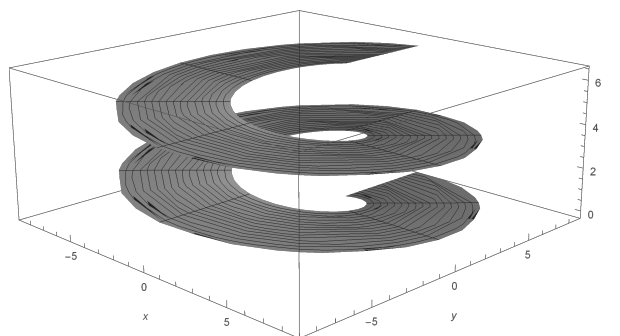
#### 3. Parameterdarstellung

Bei der Diskussion von Bogenlängen in Kapitel 1 sind Raumkurven als spezielle Parametrisierungen einer unabhängigen Variablen eingeführt worden. In einer Parameterdarstellung wird dies verallgemeinert, z.B. für

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

mit Parametern  $(u, v) \in P = [3, 8] \times [0, 4\pi]$  und

$$x = u \sin(v), \quad y = u \cos(v), \quad z = \frac{v}{2}$$



### Bezeichnungen (Nomenklatur)

- Für ein konstantes  $c \in \mathbb{R}$  bilden für ein Skalarfeld  $f$  die Lösungen von  $f(x_1, \dots, x_n) = c$  so genannte **Höhenlinien** (Isohypsen). Für den speziellen Fall  $n = 2$  wird dies z.B. auf Wanderkarten zur Angabe des Höhenprofils oder bei Wetterkarten zur Angabe von Isobaren angewendet.

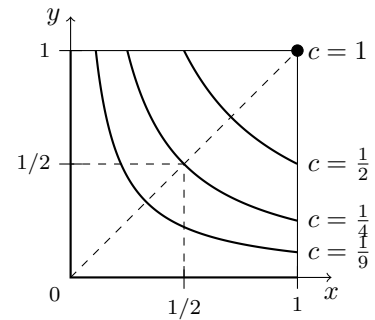
z.B.  $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = xy$

Für  $c > 0$ ,  $x > 0$  gilt:

$$f(x, y) = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{x}$$

Für  $c = 0$  sind die Achsen die Höhenlinien, da  $x \cdot y = 0$  für  $x = 0$  oder  $y = 0$  erfüllt ist.

Für  $c = 1$  besteht die Höhenlinie aus einem einzigen Punkt. Für  $c < 0$  oder  $c > 1$  gibt es keine Höhenlinien.



- Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$  der Form

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

bzw.

$$\{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in P \subseteq \mathbb{R}^2\}$$

nennt man **Flächen**. Beispiele sind Kugeloberflächen, einhüllende Flächen, etc.

Die spezielle Fläche  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = f(u, v)$  stellt den Funktionsgraphen von  $f$  mit  $z = f(x, y)$  dar.

### Beispiel 3.1

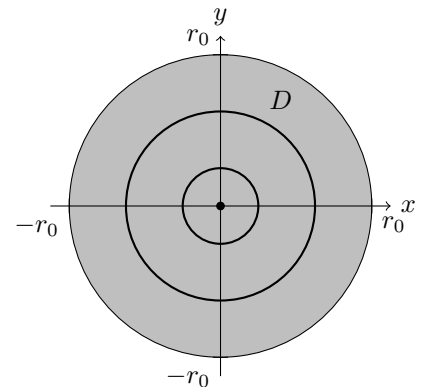
- (i) Wie lauten die Höhenlinien einer Halbkugel mit Radius  $r_0 > 0$ ?

Dazu betrachtet man  $z = f(x, y) = \sqrt{r_0^2 - x^2 - y^2}$  und den maximalen Definitionsbereich  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r_0^2\}$

Sucht man Höhenlinien, so ist für konstantes  $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x, y) = c, \quad \text{also } \sqrt{r_0^2 - x^2 - y^2} = c \geq 0 \\ \Leftrightarrow r_0^2 - x^2 - y^2 = c^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r_0^2 - c^2 \end{aligned}$$

Also gibt es Höhenlinien für alle  $c \in [0, r_0]$ . Sie beschreiben im Definitionsbereich  $D$  konzentrische Kreise um die Null mit Radius  $r = \sqrt{r_0^2 - c^2}$ . Mit größer werdendem  $c$  wird der Radius der zugehörigen Höhenlinie kleiner. Die Höhenlinie zu  $c = r_0$  besteht einzig aus dem Punkt  $(0, 0)$ .



- (ii) Alternativ lässt sich das letzte Beispiel der Halbkugel durch Polarkoordinaten beschreiben. Von den den komplexen Zahlen ist bekannt, dass

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi}$$

mit  $r \geq 0$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$  geschrieben werden kann. Die Halbkugel  $z = f(x, y) = \sqrt{r_0^2 - x^2 - y^2}$  ist nur eine Funktion des Radius  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , nicht aber des Winkels. Es ergibt sich eine so genannte radiale Symmetrie.

Daher lässt sich  $f(x, y)$  durch eine neue Funktion  $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  besser (d.h. einfacher) beschreiben:

$$z = g(r, \varphi) = \sqrt{r_0^2 - r^2}$$

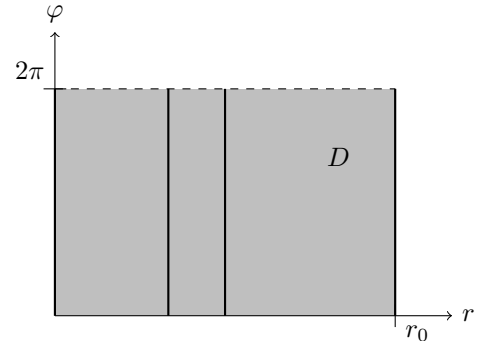


wobei  $\varphi$  in der expliziten Darstellung von  $g$  nicht auftritt. Der maximale Definitionsbereich von  $g$  ist  $D = [0, r_0] \times [0, 2\pi)$ .

Die Höhenlinien in dieser Darstellung lauten

$$\begin{aligned} g(r, \varphi) = c, \quad \text{also } \sqrt{r_0^2 - r^2} = c \geq 0 \\ \Leftrightarrow r_0^2 - r^2 = c^2 \\ \Leftrightarrow r = \sqrt{r_0^2 - c^2} \end{aligned}$$

Auch mit diesem Ansatz in Polarkoordinaten gibt es Höhenlinien für  $c \in [0, r_0]$ . Sie sind unabhängig von der zweiten Variable  $\varphi$ , d.h. sie beschreiben im Definitionsbereich  $D$  senkrechte Linien. Mit größer werdendem  $c$  verschieben sich die Linien weiter nach rechts.



Bemerkung: Die Wahl geeigneter Koordinaten kann die Bearbeitung von Problemstellungen erheblich vereinfachen!

### 3.2 Partielle Ableitung und Tangentialebene

**Definition 3.2** Es sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  eine Funktion mit zwei Variablen.

Die **partiellen Ableitungen** (1. Ordnung) von  $f$  nach  $x$  bzw.  $y$  an der Stelle  $(x_0, y_0) \in D$  sind definiert als

$$f_x(x_0, y_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

bzw.

$$f_y(x_0, y_0) := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

wenn die entsprechenden Grenzwerte existieren.

#### Bemerkungen

- Die partiellen Ableitungen geben die Tangentensteigung in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung an:

$f_x(x_0, y_0)$  ist die Steigung der Tangente  $t_x$  an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$  in  $x$ -Richtung:

$$t_x(x) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$$

$f_y(x_0, y_0)$  ist die Steigung der Tangente  $t_y$  an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$  in  $y$ -Richtung:

$$t_y(y) = f(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

- Zur Berechnung von partiellen Ableitungen hält man eine Variable fest, während man nach der anderen wie gewohnt ableitet (siehe nachstehende Beispiele).

(i) Für  $f(x, y) = x^2 + y^3 + 4xy$  gilt:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4y$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 4x$$

(ii) Für  $f(x, y) = e^{\sqrt{x-y^2}}$  gilt:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{\sqrt{x-y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{\sqrt{x-y^2}} \cdot (-2y)$$

(iii) Insbesondere verschwinden partielle Ableitungen nach Variablen, die in der Funktion nicht auftreten:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \arctan(\sqrt{y} + \frac{y}{2}) + \ln(y) \right) = 0$$

3. Zur Verallgemeinerung der partiellen Ableitung:

Betrachte ein  $n$ -dimensionales Skalarfeld  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto z = f(x_1, \dots, x_n)$$

Die partielle Ableitung nach der  $i$ -ten Variable wird berechnet, indem alle anderen Variablen festgehalten werden und nach  $x_i$  wie gewohnt die Ableitung gebildet wird. Man schreibt

$$f_{x_i} \quad \text{bzw.} \quad f_i \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Zum Beispiel erhält man:

$$(i) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 x_2 x_3 - \ln(x_1 x_2) + \sqrt{x_3} + x_1^2) = x_1 x_3 - \frac{1}{x_2}$$

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial x_3} (e^{x_1^2 + x_3^2} (2x_2 - x_3)) = e^{x_1^2 + x_3^2} (4x_2 x_3 - 2x_3^2 - 1)$$

4. Erinnerung an Satz 5.2 aus der Vorlesung „Ingenieurmathematik 1“: Eine Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  einer Variablen ist genau dann differenzierbar in  $x_0 \in D$ , wenn  $f$  linear approximierbar ist, d.h.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x)$$

mit einer schnell abfallenden Restfunktion<sup>9</sup>  $r(x)$ , für die gilt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$ .

Anschaulich bedeutet dies, dass  $f$  genau dann differenzierbar in  $x_0$  ist, wenn der Graph von  $f$  in  $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$  eine eindeutige Tangente besitzt.

Verallgemeinert man von einer Variable ( $D \subseteq \mathbb{R}$ ) auf zwei Variablen ( $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ) sowie  $n$  Variablen ( $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ), so erhält man als Interpretation:

**Tangente** ( $n=1$ )

→ **Tangentialebene** ( $n=2$ )

→ **Tangentialraum** ( $n \in \mathbb{N}$ )

<sup>9</sup>Für den Fall, dass  $f$  in  $x_0$  eine Taylor-Reihe besitzt, lässt sich die Restfunktion wie folgt interpretieren:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(x_0) (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0) (x - x_0)^3 + \dots}_{=r(x)}$$

Für die Terme des Taylor-Polynoms zweiter und höherer Ordnung gilt in der Tat der geforderte Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{2} f''(x_0) \underbrace{(x - x_0)^2}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{6} f'''(x_0) \underbrace{(x - x_0)^3}_{\rightarrow 0} + \dots \right) = 0$$

Aus der verallgemeinerten Anschauung einer Tangente wird eine analoge Definition der (totalen) Differenzierbarkeit im Folgenden eingeführt:

**Definition 3.3** Eine Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, z = f(x, y)$  von zwei Variablen heißt **(total) differenzierbar** in  $(x_0, y_0)$ , falls es  $a, b \in \mathbb{R}$  und eine Restfunktion  $r$  gibt, sodass gilt:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + r(x, y)$$

mit einer stark abfallenden Restfunktion

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{r(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Ist  $f$  differenzierbar in  $(x_0, y_0)$ , dann ist mit  $a = f_x(x_0, y_0), b = f_y(x_0, y_0)$

$$t(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

die Funktionsgleichung der **Tangentialebene** an den Graphen von  $f$  in  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ .

Anschaulich bedeutet dies, dass  $f$  genau dann (total) differenzierbar in  $(x_0, y_0)$  ist, wenn der Graph von  $f$  in  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$  eine eindeutige Tangentialebene besitzt.

Bemerkung: Die Forderung nach (totaler) Differenzierbarkeit ist stärker als die Forderung nach der Existenz von partiellen Ableitungen.

### Beispiel 3.2

(i) Betrachte das Paraboloid  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, z = f(x, y) = x^2 + y^2$

An jeden Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2) \in \mathbb{R}^3$  lässt sich die Tangentialebene mittels der partiellen Ableitungen gesucht:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0$$

Daraus folgt die Gleichung der Tangentialebene

$$t(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$= x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0 \cdot (y - y_0)$$

(ii) Für die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = \cos(xy) + \frac{1}{2}xy^2$  lässt sich die Tangentialebene am Punkt  $(x_0, y_0) = (\pi, \frac{1}{2})$  bestimmen:

$$f_x(x, y) = -\sin(xy) \cdot y + \frac{1}{2}y^2 = y(\frac{y}{2} - \sin(xy))$$

$$f_y(x, y) = -\sin(xy) \cdot x + xy = x(y - \sin(xy))$$

Ausgewertet am Punkt  $(x_0, y_0) = (\pi, \frac{1}{2})$  ist  $f_x(\pi, \frac{1}{2}) = -\frac{3}{8}$  und  $f_y(\pi, \frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{2}$ . Daraus folgt für die Gleichung der Tangentialebene:

$$t(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}(x - \pi) - \frac{\pi}{2}(y - \frac{1}{2})$$

- (iii) Für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $z = f(x, y) = (x^2 - y - xy)e^{-x}$  sind alle Punkte  $(x_0, y_0)$  gesucht, für die die Tangentialebene parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene liegt.

Die geometrische Bedingung der Parallelität übersetzt sich in die analytische Bedingung, dass die beiden ersten partiellen Ableitungen gleichzeitig verschwinden müssen:  $f_x(x_0, y_0) = 0$  und  $f_y(x_0, y_0) = 0$ . Es gilt:

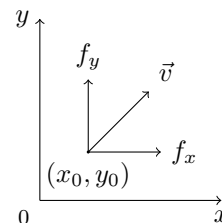
$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (2x - y)e^{-x} - (x^2 - y - xy)e^{-x} = xe^{-x}(2 - x + y) \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y(x, y) &= (-1 - x)e^{-x} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Bedingung ergibt sich sofort  $x_0 = -1$ , aus der ersten Bedingung folgt  $y_0 = x_0 - 2 = -3$ .

$\Rightarrow$  Es gibt also genau einen Punkt  $(x_0, y_0) = (-1, -3)$ , für den die Tangentialebene an den Graphen von  $f$  horizontal, d.h. parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene liegt.

### 3.3 Richtungsableitung und Gradient

Betrachte ein Skalarfeld  $f$  in zwei Variablen und einen Punkte  $(x_0, y_0)$ . Die partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$  an diesem Punkt zeigen an, wie sich der Funktionswert  $f(x_0, y_0)$  in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung verändert. Mit der Richtungsableitung untersucht man die Frage, wie sich  $f(x_0, y_0)$  in eine beliebige Richtung  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  verändert.



**Definition 3.4** Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z = f(x, y)$ , ein Skalarfeld von zwei Variablen. Für  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  mit  $|\vec{v}| = 1$  ist die **Richtungsableitung** von  $f$  in Richtung  $\vec{v}$  an der Stelle  $(x_0, y_0) \in D$  definiert als

$$f_{\vec{v}}(x_0, y_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv_x, y_0 + hv_y) - f(x_0, y_0)}{h},$$

falls der entsprechende Grenzwert existiert.

#### Bemerkungen

1. Für  $\vec{v} = \vec{e}_1$  bzw.  $\vec{v} = \vec{e}_2$  gilt  $f_{\vec{v}} = f_x$  bzw.  $f_{\vec{v}} = f_y$ , d.h. partielle Ableitungen sind besondere Richtungsableitungen.
2. Für die reelle Funktion  $g(h) := f(x_0 + hv_x, y_0 + hv_y)$  mit  $0 \in D_g \subseteq \mathbb{R}$  gilt:  $g'(0) = f_{\vec{v}}(x_0, y_0)$ .
3. Die Richtungsableitung  $f_{\vec{v}}(x_0, y_0)$  gibt die Steigung der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  in Richtung  $\vec{v}$  an.
4. Die Richtungsableitung lässt sich auf ein  $n$ -dimensionales Skalarfeld verallgemeinern: Für  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  mit  $|\vec{v}| = 1$  ist die Richtungsableitung an einem Punkt  $\vec{a} \in D$  definiert als

$$f_{\vec{v}}(\vec{a}) = g'(0)$$

wobei  $g(h) := f(a_1 + hv_1, \dots, a_n + hv_n)$  mit  $0 \in D_g \subseteq \mathbb{R}$ .

### Beispiel 3.3

- (i) Betrachte die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = 3x^2 - 2y^3$ . Gesucht sind all die Stellen, an denen die Richtungsableitung in Richtung von  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  verschwindet.

Normierung: Der angegebene Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  ist zunächst zu normieren. Aus  $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  ergibt sich  $\vec{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  mit  $|\vec{v}| = 1$  ✓

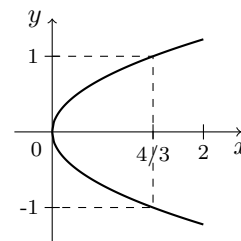
Hilfsfunktion: Die Hilfsfunktion  $g$  und deren Ableitung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} g(h) &:= f(x + hv_x, y + hv_y) = f\left(x + h \cdot \frac{3}{5}, y + h \cdot \frac{4}{5}\right) \\ &= 3\left(x + h \cdot \frac{3}{5}\right)^2 - 2\left(y + h \cdot \frac{4}{5}\right)^3 \\ \Rightarrow g'(h) &= 6\left(x + h \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} - 6\left(y + h \cdot \frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} \\ \Rightarrow g'(0) &= \frac{18}{5}x - \frac{24}{5}y^2 \end{aligned}$$

Die Richtungsableitung ist somit gegeben durch

$$f_{\vec{v}}(x, y) = g'(0) = \frac{6}{5}(3x - 4y^2)$$

Diese verschwindet für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $3x - 4y^2 = 0$ , also für  $x = \frac{4}{3}y^2 \geq 0$  (siehe nebenstehende Skizze).



- (ii) Als weiteres Beispiel betrachte man die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = y \cdot \cos(x)$ . Gesucht ist die Richtungsableitung in Richtung von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  an der Stelle  $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, 4)$ .

Normierung: Der angegebene Richtungsvektor ist wieder nicht normiert, was zu  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $|\vec{v}| = 1$  führt.

Hilfsfunktion: Über die Hilfsfunktion  $g$  und deren Ableitung bei  $h = 0$  ergibt sich die Richtungsableitung:

$$\begin{aligned} g(h) &:= f\left(x + hv_x, y + hv_y\right) = f\left(x + \frac{h}{\sqrt{2}}, y + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(y + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(x + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \\ \rightarrow g'(h) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(x + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - \left(y + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(x + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow g'(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(x) - y \sin(x)) = f_{\vec{v}}(x, y) \end{aligned}$$

An der gegebenen Stelle  $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, 4)$  ergibt sich die Richtungsableitung:

$$f_{\vec{v}}\left(\frac{\pi}{2}, 4\right) = -2\sqrt{2}$$

**Definition 3.5** Wenn ein Skalarfeld  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nach allen  $n$  Variablen partiell differenzierbar ist, so kann man alle partiellen Ableitungen in einem Vektor zusammenfassen, dem sogenannten **Gradienten** von  $f$ , der mit  $\nabla f$  oder  $\text{grad } f$  bezeichnet wird.

Speziell für  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, z = f(x, y)$ , ist also

$$\text{grad } f(x, y) := \nabla f(x, y) := \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

### Bemerkung

1. Der Operator  $\nabla$  wird gerne als „Nabla“ bezeichnet. In manchen Büchern wird er auch mit einem zusätzlichen Vektorpfeil  $\vec{\nabla}$  geschrieben.
2. Der Gradient ist nur für Skalarfelder definiert,  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , er selbst ist allerdings ein Vektorfeld,  $\nabla f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Beispiel 3.4** Man betrachte ein dreidimensionales Skalarfeld  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y, z) = x^2y - y^2z + xz$$

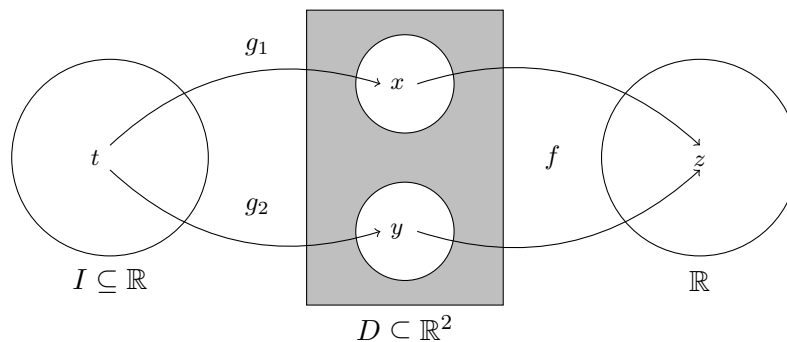
Daraus ergeben sich die partiellen Ableitungen  $f_x = 2xy + z$ ,  $f_y = x^2 - 2yz$  und  $f_z = -y^2 + x$ . Der Gradient stellt diese in einem Vektorfeld dar:

$$\text{grad } f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy + z \\ x^2 - 2yz \\ x - y^2 \end{pmatrix}$$

Zur Vorbereitung des folgenden Satzes betrachte man eine Verkettung mit zwei reellen Funktionen  $g_1, g_2 : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche die Komponenten eines Skalarfeldes  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  bilden:

$$h : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = f(g_1(t), g_2(t))$$

Die Abbildung  $h$  lässt sich wie folgt darstellen,  $z = h(t) = f(g_1(t), g_2(t)) = f(x, y)$ :



### Satz 3.6 (Kettenregel)

Es sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und ferner  $g_1, g_2 : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Deren Verkettung (siehe vorbereitende Skizze) sei  $h : I \rightarrow \mathbb{R}, h(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ .

Wenn  $f, g_1, g_2$  differenzierbar sind, dann ist auch  $h$  differenzierbar mit

$$\begin{aligned} h'(t) &= f_x(g_1(t), g_2(t))g_1'(t) + f_y(g_1(t), g_2(t))g_2'(t) \\ &= \begin{pmatrix} f_x(g_1(t), g_2(t)) \\ f_y(g_1(t), g_2(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix} \\ &= \nabla f(g_1(t), g_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Multiplikation  $\cdot$  bezeichnet dabei ein Skalarprodukt.

Bemerkung: Die Kettenregel lässt sich auf  $n$  Dimensionen verallgemeinern:

Ist  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit Komponentenfunktionen  $g_k : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $1 \leq k \leq n$ ), so gilt:

$$h'(t) = \nabla f(g_1(t), \dots, g_n(t)) \cdot \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_n'(t) \end{pmatrix}$$

### Beispiel 3.5

- (i) Betrachte  $f(x, y) = 4x^2 - xy^3$  sowie die beiden Komponentenfunktionen  $g_1(t) = \sin(t)$  und  $g_2(t) = e^t$  für  $I \in \mathbb{R}_0^+$ . Damit ist die Verkettung  $h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$h(t) = f(g_1(t), g_2(t)) = 4 \sin^2(t) - \sin(t)e^{3t}$$

Die Ableitung ergibt sich mithilfe der Kettenregel aus dem vorausgehenden Satz:

$$h'(t) = \nabla f(g_1(t), g_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix}$$

Für den Gradienten von  $f$  gilt

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 8x - y^3 \\ -3xy^2 \end{pmatrix}$$

sowie für die Ableitungen der Komponentenfunktionen  $g_1'(t) = \cos(t)$  und  $g_2'(t) = e^t$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow h'(t) &= \begin{pmatrix} 8x - y^3 \\ -3xy^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ e^t \end{pmatrix} \\ &= 8 \sin(t) \cos(t) + \cos(t)e^{3t} - 3 \sin(t)e^{3t} \end{aligned}$$

Zur Kontrolle kann dieses Ergebnis auch „zu Fuß“ aus  $h(t)$  berechnet werden:

$$h'(t) = 8 \sin(t) \cos(t) + \cos(t)e^{3t} - 3 \sin(t)e^{3t} \quad \checkmark$$

- (ii) Betrachte das dreidimensionale Skalarfeld  $f(x, y, z) = x^2y - y^2z + xz$  und die Komponentenfunktionen  $g_1(t) = \sin(t)$ ,  $g_2(t) = e^t$  und  $g_3(t) = t^2$ . Es ist

$$h(t) = f(g_1(t), g_2(t), g_3(t)) = \sin^2(t)e^t - e^{2t}t^2 + \sin(t)t^2$$

Mit der Kettenregel aus dem vorausgehenden Satz ergibt sich:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \nabla f(g_1(t), g_2(t), g_3(t)) \cdot (g_1'(t) // g_2'(t) // g_3'(t)) \\ &= \begin{pmatrix} 2g_1(t)g_2(t) + g_3(t) \\ g_1^2(t) - 2g_2(t)g_3(t) \\ g_1(t) - g_2^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ e^t \\ 2t \end{pmatrix} \\ &= (2 \sin(t)e^t + t^2) \cdot \cos(t) + (\sin^2(t) - 2e^t t^2) \cdot e^t + (\sin(t) - e^{2t}) \cdot 2t \end{aligned}$$

Zur Kontrolle lässt sich auch in diesem Fall das Ergebnis „zu Fuß“ aus  $h(t)$  bestätigen:

$$h'(t) = (2 \sin(t)e^t + t^2) \cdot \cos(t) + (\sin^2(t) - 2e^t t^2) \cdot e^t + (\sin(t) - e^{2t}) \cdot 2t \quad \checkmark$$

### Satz 3.7 (Zusammenhang Richtungsableitung u. Gradient)

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $\vec{a} \in D$  und  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  mit  $|\vec{v}| = 1$ . Dann gilt:

$$f_{\vec{v}}(\vec{a}) = \text{grad } f(\vec{a}) \cdot \vec{v},$$

d.h. die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $\vec{v}$  an der Stelle  $\vec{a}$  ist gegeben als Skalarprodukt aus dem Gradienten von  $f$  an der Stelle  $\vec{a}$  und dem Richtungsvektor  $\vec{v}$ .

**Beispiel 3.6** Den Zusammenhang zwischen Richtungsableitung und Gradient lässt sich zunächst an den bereits bekannten Beispielen zur Richtungsableitung verifizieren:

(i) Für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = 3x^2 - 2y^3$  und  $\vec{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  ergibt sich direkt:

$$f_{\vec{v}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 6x \\ -6y^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{6}{5}(3x - 4y^2)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem im vorherigen Beispiel mittels Hilfsfunktion gefundenen Ergebnis überein. ✓

(ii) Für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = y \cdot \cos(x)$  und  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ergibt sich direkt:

$$f_{\vec{v}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -y \cdot \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(x) - y \sin(x))$$

Auch dieses Ergebnis stimmt mit dem im vorherigen Beispiel mittels Hilfsfunktion gefundenen Ergebnis überein. ✓

(iii) Es lassen sich auch neue Beispiele für Richtungsableitungen mithilfe des Gradienten nun elegant berechnen.

Betrachte das dreidimensionale Skalarfeld  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = e^z + xy^2 \sin(z)$  und die normierte Richtung  $\vec{v} = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^\top$ . Die Richtungsableitung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} f_{\vec{v}}(x, y, z) &= \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} y^2 \sin(z) \\ 2xy \sin(z) \\ e^z + xy^2 \cos(z) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3} (y^2 \sin(z) + xy \sin(z) + e^z + xy^2 \cos(z)) \end{aligned}$$

Die beiden nachstehenden Sätze beschreiben zwei wesentliche geometrische Eigenschaften des Gradienten:

**Satz 3.8**

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $\vec{a} \in D$  und  $\text{grad } f(\vec{a}) \neq \vec{0}$ .

Dann wird die Richtungsableitung  $f_{\vec{v}}(\vec{a})$  an der Stelle  $\vec{a}$  maximal, wenn

$$\vec{v} = \frac{1}{|\text{grad } f(\vec{a})|} \cdot \text{grad } f(\vec{a})$$

und minimal, wenn

$$\vec{v} = -\frac{1}{|\text{grad } f(\vec{a})|} \cdot \text{grad } f(\vec{a})$$

**Satz 3.9**

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $\vec{a} \in D$  und  $\text{grad } f(\vec{a}) \neq \vec{0}$ . Dann steht  $\text{grad } f(\vec{a})$  senkrecht auf der Tangente an die Höhenlinie, in der  $\vec{a}$  liegt.

Zusammenfassung der letzten beiden Sätze: Der Gradient zeigt in Richtung der stärksten Änderung von  $f$  und steht dabei immer senkrecht auf den Höhenlinien.



**Beispiel 3.7** Zur Illustration der geometrischen Interpretation des Gradienten betrachte man erneut eine Halbkugel. Ihr Radius beträgt  $r_0 = 4$ , d.h.

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

mit maximalem Definitionsbereich  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 16\}$ .

Der Gradient lautet

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2-y^2}} \\ \frac{-2y}{2\sqrt{16-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Tangente an die Höhenlinie berechnet man aus der Ableitung der Höhenlinie selbst. Für alle  $c \in [0, r_0] = [0, 4]$  lautet die explizite Darstellung der Höhenlinie:

$$h_c(x) = \pm\sqrt{16 - c^2 - x^2}$$

wobei  $\pm$  die obere bzw. untere Lösung der impliziten Darstellung  $x^2 + y^2 \stackrel{!}{=} r_0^2 - c^2 = 16 - c^2$  der Höhenlinie beschreibt (vgl. Kapitel 3.1 und das dortige Beispiel zu Höhenlinien einer Halbkugel).

Die Steigung der Höhenlinie ist

$$h'_c(x) = \pm \frac{1}{2\sqrt{16 - c^2 - x^2}} \cdot (-2x) = \mp \frac{x}{\sqrt{16 - c^2 - x^2}}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung der Tangente (Taylor 1. Ordnung) in der Variablen  $\Delta x$ , die den Abstand zum Punkt  $x$  bezeichnet:

$$t_c(x + \Delta x) = h_c(x) + h'_c(x)\Delta x = \pm\sqrt{16 - c^2 - x^2} \mp \frac{x \cdot \Delta x}{\sqrt{16 - c^2 - x^2}}$$

Der Richtungsvektor der Tangente an die Höhenlinie lässt sich damit identifizieren:

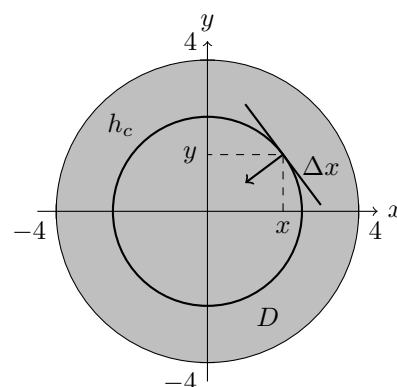
$$\vec{t}_c(x) = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \mp \frac{x \cdot \Delta x}{\sqrt{16 - c^2 - x^2}} \end{pmatrix}$$

Ein verschwindendes Skalarprodukt zwischen dem Gradienten und dem Richtungsvektor der Tangente an die Höhenlinie zeigt an, dass der Gradient senkrecht auf der Höhenlinie steht:

$$\nabla f(x, h_c(x)) \perp \vec{t}_c(x) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(x, h_c(x)) \cdot \vec{t}_c(x) = 0$$

In der Tat ergibt sich:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, h_c(x)) \cdot \vec{t}_c(x) &= -\frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - h_c^2(x)}} \begin{pmatrix} x \\ h_c(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \mp \frac{x \cdot \Delta x}{\sqrt{16 - c^2 - x^2}} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} x \\ \pm\sqrt{16 - c^2 - x^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \mp \frac{x \cdot \Delta x}{\sqrt{16 - c^2 - x^2}} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{c} x \Delta x \quad \underbrace{+}_{(-)(\pm)(\mp)} \quad \frac{1}{c} x \Delta x \frac{\sqrt{\cdot}}{\sqrt{\cdot}} = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$



Im Folgenden wird noch eine alternative Betrachtung mit Polarkoordinaten anstelle von kartesischen Koordinaten diskutiert. Die radiale Symmetrie hat bereits bei der Beschreibung der Höhenlinien in diesen Koordinaten zu einer Vereinfachung der Diskussion geführt.

Es gilt für  $r \in [0, r_0] = [0, 4]$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$ :

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2} = g(r, \varphi) = \sqrt{16 - r^2}$$

Betrachtet man den Gradienten der Funktion  $g$ , so ist das Ergebnis nur vom Radius  $r$ , der ersten Variable, abhängig:

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{16 - r^2} \cdot (-2r)} = -\frac{r}{\sqrt{16 - r^2}} = -\frac{r}{g}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) = 0 \quad (\text{d.h. } g \text{ ist unabhängig von } \varphi)$$

Damit folgt:

$$\nabla g(r, \varphi) = -\frac{r}{g} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies bedeutet, dass die größte Änderung von  $g$  (bzw.  $f$ ) stets in Richtung des Radius und niemals in Richtung des Winkels zeigt. Ferner gilt, dass die Höhenlinien von  $f$ , d.h. in kartesischen Koordinaten, konzentrische Kreise um den Ursprung beschreiben. Die Tangente an die Höhenlinie liegt also stets „in Richtung des Winkels  $\varphi$ “. In Polarkoordinaten lässt sich dies ausdrücken als

$$\vec{t}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Insgesamt ergibt sich auch hier, dass Gradient und Tangente an die Höhenlinie stets aufeinander senkrecht stehen:

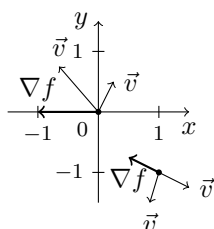
$$\nabla g(r, \varphi) \cdot \vec{t}_c = -\frac{r}{g} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

### 3.4 Extremwertdiskussion

Im Folgenden werden Skalarfelder  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dahingehend untersucht, wo sie (lokale) Extrema besitzen und wie diese aussehen. Oft wird dabei auf den zweidimensionalen Fall ( $n = 2$ ) reduziert, um spezielle Aspekte eines allgemeinen Falls zu diskutieren.

Zur Erinnerung in 1D: Das Polynom  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8$  besitzt als erste Ableitung  $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3x(x - 4)$ . Damit ergeben sich horizontale Tangen an den Graphen von  $f$  bei  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 4$ . Mit  $f''(x) = 6x - 12$  gilt  $f''(0) = -12 < 0$ , d.h. dort gibt es ein lokales Maximum, und  $f''(4) = 12 > 0$ , d.h. dort gibt es ein lokales Minimum.

Verallgemeinerung in 2D: Betrachte das Skalarfeld  $f(x, y) = x^2y - \frac{1}{2}y^2 - 2x + 1$ .



Wie stellt sich allgemein die Richtungsableitung dar am Punkt

- (i)  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  und
- (ii)  $(x_0, y_0) = (1, -1)$ ?

Für den Gradienten gilt  $\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy - 2 \\ x^2 - y \end{pmatrix}$ , d.h. für  $\vec{v} = (v_1, v_2)^\top$  ergibt die Richtungsableitung an den betrachteten Punkten

$$f_{\vec{v}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{v} = -2v_1 \quad \text{und} \quad f_{\vec{v}}(1, -1) = \nabla f(1, -1) \cdot \vec{v} = -2(2v_1 - v_2)$$

Aufgrund seiner geometrischen Interpretation gibt es in Richtung des Gradienten stets die Möglichkeit, den Wert von  $f(x, y)$  zu vergrößern. Daher ist es für ein lokales Extremum *notwendig*, dass der Gradient verschwindet:  $\nabla f(x, y) = \vec{0}$ .

**Satz 3.10** (Notwendige Bedingung für Extrema) Sei  $(x_0, y_0)$  im Inneren von  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar in  $(x_0, y_0)$ . Wenn  $f$  in  $(x_0, y_0) \in D$  ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) hat, dann muss gelten:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \vec{0}$$

und man bezeichnet  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  als **stationären Punkt**.

Bemerkungen:

- Die Bedingung „im Inneren“ bedeutet, dass  $\vec{a} \in D$  nicht am Rand von  $D$  liegen darf. Dies ist analog zum eindimensionalen Fall zu verstehen, wo etwa für  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$  ein Minimum am Rand ( $x_0 = 0$  mit  $f(0) = 0 \leq \sqrt{x}$  für alle  $x \in \mathbb{R}_0^+$ ) liegt, dort aber keine erste Ableitung berechnet werden kann, also insbesondere  $f'(0) = 0$  *nicht* gilt.
- Die Bedingung ist nur notwendig, aber nicht hinreichend. Ähnlich verhält es sich in einer Dimension, etwa bei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^3$  mit  $f'(0) = 0$ , es aber dennoch bei  $x_0 = 0$  kein lokales Extremum gibt.
- Da  $f$  total differenzierbar ist, bedeutet  $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ , dass bei  $\vec{a}$  der Tangentialraum stationär ist. In zwei Dimensionen ( $n = 2$ ) liegt die Tangentialebene horizontal, d.h. parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene.

Frage: Wie entscheidet man, ob ein stationärer Punkt mit  $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$  ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder eine andere geometrische Form darstellt?

Analog zum eindimensionalen Fall betrachtet man bei einem  $n$ -dimensionalen Skalarfeld die zweite Ableitung, von der es aufgrund von  $n$  Variablen im Allgemeinen  $n^2$  verschiedene gibt.

1D  $\rightarrow$  Prüfung, ob zweite Ableitung von  $f$  positiv/negativ ist, um lokales Minimum/Maximum zu identifizieren. Bei  $f''(x_0) = 0$  sind höhere Ableitungen zu untersuchen.

2D  $\rightarrow$  Es existieren vier Möglichkeiten, ein Skalarfeld  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal abzuleiten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f_y)_x = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f_y)_x = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f_y)_y = f_{yy}$$

**Satz 3.11** (Satz von Schwarz) Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal partiell differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen 2. Ordnung, dann kann die Reihenfolge der Ableitungen vertauscht werden.

Insbesondere gilt für  $n = 2$  dann:  $f_{xy} = f_{yx}$ .

**Beispiel 3.8** Man betrachte das Skalarfeld  $f(x, y) = x \sin(xy)$ . Für die ersten und zweiten Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} f_x &= \sin(xy) + xy \cos(xy) \\ f_y &= x^2 \cos(xy) \\ f_{xx} &= 2y \cos(xy) - xy^2 \sin(xy) \\ f_{xy} &= 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) \\ f_{yx} &= 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) = f_{xy} \\ f_{yy} &= -x^3 \sin(xy) \end{aligned}$$

Die zweiten partiellen Ableitungen fasst man in der so genannten **Hesse-Matrix** zusammen. Für  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist diese definiert als:

$$H_f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

Für den zweidimensionalen Fall ( $n = 2$ ) fasst die Hesse-Matrix vier zweite Ableitungen zusammen:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Falls die Bedingungen des Satzes von Schwarz erfüllt sind, ist die Hesse-Matrix symmetrisch:  $H_f(x, y) = H_f(x, y)^\top$ . Sehr oft ist diese Bedingung erfüllt, sodass sich zwei reelle Eigenwerte der Hesse-Matrix bestimmen lassen ( $\lambda_1, \lambda_2$ ), deren Produkt die Determinante der Matrix ergibt:

$$\lambda_1(x, y)\lambda_2(x, y) \text{ ist ein Eigenwert von } H_f(x, y) \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1(x, y)\lambda_2(x, y) = \det H_f(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$$

Die Hesse-Matrix dient als **verallgemeinerte zweite Ableitung**. Mit ihr lassen sich stationäre Punkte unter Nutzung des folgenden Satzes weiter untersuchen.

**Satz 3.12** (Hinreichende Bedingung für Extrema in 2D)

Sei  $(x_0, y_0)$  im Inneren von  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar und  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  ein stationärer Punkt.

Mit der **Hessematrix**  $H_f(x_0, y_0) := \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$  von  $f$  in  $(x_0, y_0)$  und ihrer Determinante

$$d := \det(H_f(x_0, y_0)) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

gilt:

- Ist  $d > 0$  und  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  (bzw.  $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ ), dann hat  $f$  in  $(x_0, y_0)$  ein lokales Maximum.
- Ist  $d > 0$  und  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  (bzw.  $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ ), dann hat  $f$  in  $(x_0, y_0)$  ein lokales Minimum.
- Ist  $d < 0$ , dann hat  $f$  in  $(x_0, y_0)$  einen Sattelpunkt (also insbesondere kein lokales Extremum).

- Ist  $d = 0$ , so ist ohne weitere Untersuchung keine Aussage möglich.

### Beispiel 3.9

(i) Man betrachte das Paraboloid  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

$$\Rightarrow \nabla f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ d.h. einziger stationärer Punkt ist } \vec{a} = (x, y)^\top = (0, 0)^\top$$

$\Rightarrow H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , die Hesse-Matrix ist also konstant und unabhängig von  $x$  und  $y$ . Es folgt  $\det H_f = 4 > 0$  mit  $f_{xx} = f_{yy} = 2 > 0$ , d.h. am stationären Punkt  $(x, y) = (0, 0)^\top$  liegt ein lokales Minimum vor.

(ii) Man betrachte das Skalarfeld  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .

$$\Rightarrow \nabla f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \text{ d.h. einziger stationärer Punkt ist } \vec{a} = (x, y)^\top = (0, 0)^\top$$

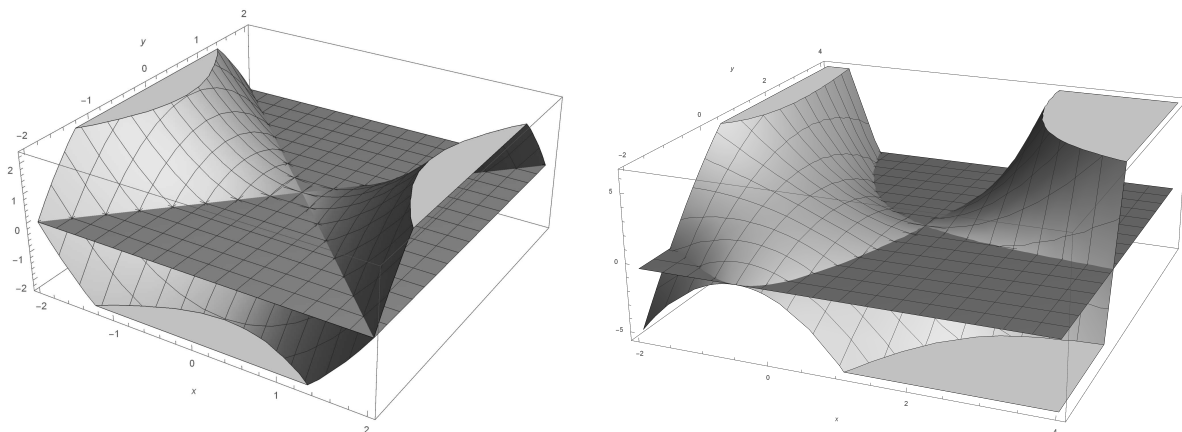
$\Rightarrow H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ , die Hesse-Matrix ist also konstant und unabhängig von  $x$  und  $y$ . Es folgt  $\det H_f = -4 < 0$ , d.h. am stationären Punkt  $(x, y) = (0, 0)^\top$  liegt ein Sattelpunkt vor.

(iii) Zu Beginn dieses Abschnitts wurde bereits  $f(x, y) = x^2y - \frac{1}{2}y^2 - 2x + 1$  betrachtet.

$\Rightarrow \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy - 2 \\ x^2 - y \end{pmatrix}$ , d.h. der stationäre Punkt muss gleichzeitig zwei Bedingungen erfüllen:  $y = \frac{1}{x}$  und  $y = x^2$ .

Hieraus folgt der einzige stationäre Punkt  $\vec{a} = (x, y)^\top = (1, 1)^\top$

$\Rightarrow H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$ . Es folgt  $\det H_f(x, y) = -4x^2 - 2y$ , d.h. am stationären Punkt  $(x, y) = (1, 1)^\top$  gilt  $\det H_f(1, 1) = -6 < 0$ . Somit liegt wieder ein Sattelpunkt mit Funktionswert  $f(1, 1) = \frac{1}{2}$  vor.



$f(x, y) = x^2 - y^2$  im linken Panel und  $f(x, y) = x^2y - \frac{1}{2}y^2 - 2x + 1$  im rechten Panel

Bei den Sattelpunkten ist im der Graphik zu erkennen, dass Richtungen gibt, für die der Punkt ein Minimum darstellt und andere Richtungen, für die der Punkt ein Maximum darstellt. Insgesamt ergibt sich daraus der indifferente Sattelpunkt.

Bemerkung: Die Fallunterscheidungen in Satz 3.12 lassen sich nicht direkt auf allgemeine Dimensionen verallgemeinern. Für die Hesse-Matrix eines Skalarfeldes  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und einem stationären Punkt  $\vec{a} \in D$  betrachtet man im allgemeinen Fall die Eigenvektoren von  $H_f(\vec{a})$ . Ist  $H_f(\vec{a})$  symmetrisch, d.h. ist der Satz von Schwarz anwendbar, so gibt es  $n$  reelle Eigenwerte.

**Satz 3.13** (Hinreichende Bedingung für Extrema in  $nD$ )

Es sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ein Skalarfeld mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen und  $\vec{a} \in D$  ein stationärer Punkt im Inneren von  $D$ . Dann gilt mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  der Hesse-Matrix  $H_f(\vec{a})$ :

- Sind alle Eigenwerte positiv, so ist  $(\vec{a}, f(\vec{a}))$  ein lokales Minimum.
- Sind alle Eigenwerte negativ, so ist  $(\vec{a}, f(\vec{a}))$  ein lokales Maximum.
- Gibt es sowohl positive als auch negative Eigenwerte, aber keiner davon ist Null, so ist  $(\vec{a}, f(\vec{a}))$  ein Sattelpunkt.
- Gibt es mindestens einen Eigenwert Null, so ist ohne weitere Untersuchung keine Aussage möglich.

**Beispiel 3.10** Für die drei vorherigen Beispiele in zwei Dimensionen argumentiert man alternativ:

(i)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\Rightarrow H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0, \text{ d.h. lokales Minimum}$$

(ii)  $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$\Rightarrow H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1 = 2 > 0, \lambda_2 = -2 < 0, \text{ d.h. Sattelpunkt}$$

(iii)  $f(x, y) = x^2y - \frac{1}{2}y^2 - 2x + 1$

$$\Rightarrow H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1 = 3 > 0, \lambda_2 = -2 < 0, \text{ d.h. Sattelpunkt}$$

Bemerkung: Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nennt man

- **positiv definit**, wenn alle Eigenwerte größer Null sind,
- **negativ definit**, wenn alle Eigenwerte kleiner Null sind,
- **indefinit**, wenn sowohl positive als auch negative Eigenwerte existieren, aber davon keiner Null ist.

**Beispiel 3.11** Der Satz 3.13 hinreichende Bedingung für Extrema in  $n$  Dimensionen ist vor allem für  $n > 2$  interessant, da dann Satz 3.12 nicht anwendbar ist.

(i)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy + 3z^2$  für  $D = \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + x \\ 6z \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \vec{a} = \vec{0} \text{ ist einziger stationärer Punkt}$$

$$\Rightarrow H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ ist unabhängig von } (x, y, z). \text{ Die Eigenwerte berechnen sich aus dem}$$

charakteristischen Polynom  $\chi_{\vec{a}}(\lambda) = (6 - \lambda) ((2 - \lambda)^2 - 1) \stackrel{!}{=} 0$  zu  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 3$  und  $\lambda_3 = 1$ . Da alle Eigenwerte positiv sind, d.h.  $H_f$  eine positiv definite Matrix ist, besitzt  $f$  am stationären Punkt  $\vec{a} = \vec{0}$  ein lokales Minimum.

(ii)  $g(x, y, z) = (x + y)^2 + x - y + xy + z^2$  für  $D = \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \nabla g = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 1 \\ 3x + 2y - 1 \\ 2z \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \vec{a} = (1, -1, 0)^\top \text{ ist einziger stationärer Punkt}$$

$$\Rightarrow H_g = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist wieder unabhängig von } (x, y, z). \text{ Die Eigenwerte berechnen sich aus}$$

dem charakteristischen Polynom  $\chi_{\vec{a}}(\lambda) = (2 - \lambda) ((2 - \lambda)^2 - 9) \stackrel{!}{=} 0$  zu  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 2$  und  $\lambda_3 = -1$

Da sowohl positive als auch negative Eigenwerte auftreten und kein Eigenwert verschwindet, d.h.  $H_g$  eine indefinite Matrix ist, besitzt  $f$  am stationären Punkt  $\vec{a} = (1, -1, 0)^\top$  einen Sattelpunkt.

Erweiterung des mathematischen Werkzeugkastens: Extrema unter Nebenbedingungen

Die nachfolgende Diskussion beschränkt sich auf den zweidimensionalen Fall. Die Übertragung in höhere Dimensionen ist unter erhöhtem Aufwand aber auf Grundlage der selben Methoden möglich.

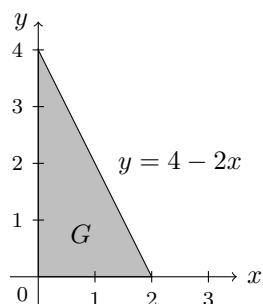
Gesucht sind sowohl lokale als auch globale Extrema eines Skalarfeldes  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  unter der Nebenbedingung  $G \subseteq D$ . Das Gebiet  $G$  soll durch Funktion  $g_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschreibbar sein:

$$G = \{(x, y) \in D \mid g_i(x, y) \leq 0\}$$

In der Bedingung  $g_i(x, y) \leq 0$  wird das Innere von  $G$  durch  $<$  beschrieben, der Rand von  $G$  wird durch  $=$  beschrieben.

**Beispiel 3.12** Die beiden folgenden Beispiele verdeutlichen die Beschreibung von Nebenbedingungen:

(i) Betrachte  $f(x, y) = (x - 1)^2 - (y - 1)^2 = x^2 - y^2 - 2(x - y)$  mit  $D = \mathbb{R}^2$ .

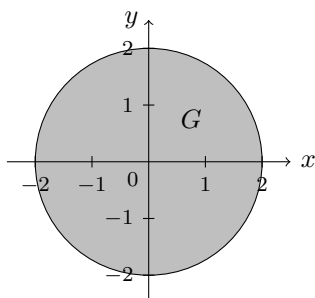


Die Nebenbedingung eines Dreiecks lässt sich beschreiben durch

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y - 4 \leq 0, -x \leq 0, -y \leq 0\}$$

Die Nebenbedingung lässt sich mithilfe von drei Ungleichungen beschreiben. Der Rand des Dreiecks lässt sich ebenfalls durch drei Teilstücke darstellen.

(ii) Die Funktion  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$  ist ebenfalls definiert auf  $D = \mathbb{R}^2$ .



Die Nebenbedingung eines Kreises lässt sich beschreiben durch

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}$$

In diesem Fall ist eine Ungleichung ausreichend um den Bereich  $G$  darzustellen.

Das folgende **prinzipielle Vorgehen** ist bei der Diskussion von Extrema unter Nebenbedingungen anzuwenden:

- (I) Betrachtung des Inneren von  $G$  mit den bekannten Methoden der  $n$ -dimensionalen Differentialrechnung (Gradient, Hesse-Matrix)
- (II) Betrachtung des Randes von  $G$   
 → Einsetzverfahren: Auflösen von  $g(x, y) = 0$  nach  $x$  oder  $y$  und Einsetzen in  $f(x, y)$   
 → Parametrisierung:  $(x, y) \in G \Leftrightarrow x = x(t), y = y(t)$  für ein  $t \in I$

Bei der Betrachtung des Randes ist zu beachten, dass bei einer Zerlegung in unterschiedliche Teilstücke die Betrachtung von Ecken (d.h. die Endpunkte von Rändern) separat zu untersuchen sind.

zurück zu den Beispielen

- (i)  $f(x, y) = (x-1)^2 - (y-1)^2$  mit dem Dreieck  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+y-4 \leq 0, -x \leq 0, -y \leq 0\}$

$$\rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ -2(y-1) \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist einziger stationärer Punkt von } f.$$

Dieser liegt im Inneren von  $G$ .

$$\rightarrow H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{a}, f(\vec{a})) = (1, 1, 0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

In einem zweiten Schritt betrachtet man den Rand von  $G$ . Dieser lässt sich in drei Abschnitte zerlegen:

- $g_1(x, y) = 2x + y - 4 \stackrel{!}{=} 0$ , daher lässt sich das Einsetzverfahren verwenden:  $y = 4 - 2x$  eingesetzt in  $f(x, y(x))$  ergibt

$$r_1(x) := f(x, 4 - 2x) = (x-1)^2 - (3-2x)^2 = -3x^2 + 10x - 8$$

Daraus folgt mit den Methoden der eindimensionalen Differentialrechnung:

$$r_1'(x) = -6x + 10 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

$$r_1''(x) = -6 < 0$$

Damit besitzt  $r_1(x)$  bei  $x = \frac{5}{3}$  ein Maximum mit Wert  $r_1(\frac{5}{3}) = \frac{1}{3}$ . Das gefundene Maximum von  $r_1$  liegt am Rand des zu betrachtenden Dreiecks  $G$ :  $(x, y) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}) \in G$ .

- $g_2(x, y) = -x \stackrel{!}{=} 0$ , d.h.  $x = 0$ .

$$r_2(y) := f(0, y) = 1 - (y-1)^2 = -y^2 + 2y$$

Daraus folgt mit den Methoden der eindimensionalen Differentialrechnung:

$$r_2'(y) = -2y + 2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ mit } x = 0$$

$$r_2''(y) = -2 < 0$$

Damit besitzt  $r_2(y)$  bei  $y = 1$  ein Maximum mit Wert  $r_2(1) = 1$ . Das gefundene Maximum von  $r_2$  liegt wieder am Rand des zu betrachtenden Dreiecks  $G$ :  $(x, y) = (0, 1) \in G$ .



- $g_3(x, y) = -y \stackrel{!}{=} 0$ , d.h.  $y = 0$ .

$$r_3(x) := f(x, 0) = (x - 1)^2 - 1 = x^2 - 2x$$

Daraus folgt mit den Methoden der eindimensionalen Differentialrechnung:

$$r_3'(x) = 2x - 2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{mit } y = 0$$

$$r_3''(x) = 2 > 0$$

Damit besitzt  $r_3(x)$  bei  $x = 1$  ein Minimum mit Wert  $r_3(1) = -1$ . Das gefundene Minimum von  $r_3$  liegt auch am Rand des zu betrachtenden Dreiecks  $G$ :  $(x, y) = (1, 0) \in G$ .

- Es verbleiben drei Ecken  $(x, y, f(x, y))$  an den Rändern von  $g_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), die durch direkte Auswertung der Funktion separat untersucht werden:  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 4, -8)$  und  $(2, 0, 0)$ .

Als Ergebnis der Untersuchung von  $f$  auf dem Dreieck  $G$  ergibt sich also ein globales Minimum bei  $(x, y) = (0, 4)$  mit dem Wert  $f(0, 4) = -8$ . Das globale Maximum liegt bei  $(x, y) = (0, 1)$  mit  $f(0, 1) = 1$ .

- (ii)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$  auf dem Kreis  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}$

$$\rightarrow \quad \nabla f = \begin{pmatrix} 2x - 4y \\ 2y - 4x \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist einziger stationärer Punkt von } f.$$

Dieser liegt im Inneren von  $G$ .

$$\rightarrow \quad H_f = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ mit Eigenwerten } \lambda_1 = 6 \text{ und } \lambda_2 = -2, \text{ d.h. der stationäre Punkt ist indefinit. Damit ist } (0, 0, 0) \text{ ein Sattelpunkt.}$$

Wiederum wird in einem zweiten Schritt der Rand von  $G$  betrachtet, der sich in einen oberen sowie unteren Halbkreis zerlegen lässt:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2} \quad \text{für } x \in [-2, 2]$$

- Für den oberen Halbkreis gilt

$$\begin{aligned} r_1(x) &= f(x, \sqrt{4 - x^2}) = 4 - 4x\sqrt{4 - x^2} \\ \Rightarrow \quad r_1'(x) &= \frac{8(x^2 - 2)}{\sqrt{4 - x^2}} \quad \text{für } x \in (-2, 2) \\ \Rightarrow \quad r_1''(x) &= -\frac{8x(x^2 - 6)}{\sqrt{(4 - x^2)^3}} \quad \text{für } x \in (-2, 2) \end{aligned}$$

Aus  $r_1'(x) \stackrel{!}{=} 0$  folgt  $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$  mit  $y = \sqrt{2}$ . Ferner gilt  $r_1''(\sqrt{2}) = 16 > 0$  und  $r_1''(-\sqrt{2}) = -16 < 0$ , also ergeben sich auf dem oberen Halbkreis zwei lokale Extrema:

$$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -4\right) \text{ ist ein lokales Minimum,} \quad \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 12\right) \text{ ist ein lokales Maximum}$$

- Analog erhält man für den unteren Halbkreis  $r_2(x) = f(x, -\sqrt{4 - x^2}) = 4 + 4x\sqrt{4 - x^2}$  mit  $r_2'(x) = -r_1'(x)$  und  $r_2''(x) = -r_1''(x)$ . Daraus folgt:

$$\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 12\right) \text{ ist ein lokales Maximum,} \quad \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -4\right) \text{ ist ein lokales Minimum}$$

- An den Rändern der beiden Halbkreise liegen zwei Eckpunkte  $(x, y, f(x, y))$ , die sich durch direkte Auswertung der Funktion separat untersuchen lassen:  $(-2, 0, 4)$  und  $(2, 0, 4)$ .

Als Ergebnis der Untersuchung von  $f$  auf dem Kreis  $G$  ergeben sich zwei globales Minima bei  $(x, y) = \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  jeweils mit dem Wert  $f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = -4$ . Die globalen Maxima liegen bei  $(x, y) = \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  mit  $f(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = 12$ .

- (iii) Zu der eben diskutierten Aufgabe  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$  auf dem Kreis  $G$  ist eine alternative Untersuchung unter Verwendung einer Parametrisierung von  $G$  möglich. Mit den Polarkoordinaten  $r \in [0, 2]$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und

$$x = r \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad y = r \sin(\varphi)$$

lässt sich der Kreis  $G$  wie folgt beschreiben:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4 \leq 0\} = \{(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in [0, 2], \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

Es gilt allgemein

$$\begin{aligned} f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) &= (r \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\varphi))^2 - 4r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ &= r^2 - 4r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Für den Rand von  $G$  ist  $r = 2$  zu setzen, d.h. für alle  $\varphi \in [0, 2\pi)$  ist

$$\begin{aligned} h(\varphi) &:= 4 - 16 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ h'(\varphi) &= 16 \sin^2(\varphi) - 16 \cos^2(\varphi) \\ h''(\varphi) &= 64 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Die stationären Punkte ergeben sich aus der Bedingung  $h'(\varphi) \stackrel{!}{=} 0$ , d.h.  $|\sin(\varphi)| = |\cos(\varphi)|$ , was für vier Winkel erfüllt ist:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}, \quad \varphi_3 = \frac{5\pi}{4}, \quad \varphi_4 = \frac{7\pi}{4}$$

Daraus lassen sich die selben globalen Extrema ableiten wie zuvor in kartesischen Koordinaten:

$$h''(\varphi) \begin{cases} > 0 & \text{für } \varphi \in \{\varphi_1, \varphi_3\} \\ < 0 & \text{für } \varphi \in \{\varphi_2, \varphi_4\} \end{cases}$$

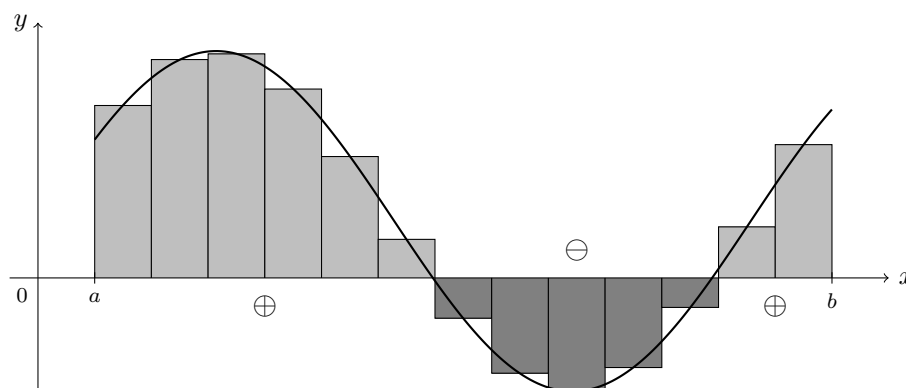
Die beiden Minima besitzen den Funktionswert  $h(\varphi_1) = h(\varphi_3) = -4$ , die beiden globalen Maxima den Wert  $h(\varphi_2) = h(\varphi_4) = 12$ . Der Rand des Kreises besteht aufgrund der  $2\pi$ -Periodizität aus nur einem Punkt  $\varphi = 0$ . Es gilt  $h(0) = 4$ .

## 4 Integralrechnung mehrerer Veränderlicher

Ziel dieses Kapitels ist eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals  $\int f(x) dx$  mit  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf mehrere Dimensionen, d.h. auf Skalarfelder  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Kurze Wiederholung der Idee des eindimensionalen Riemann-Integrals

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, so ist  $\int_a^b f(x) dx$  die Flächenbilanz im Bereich  $a \leq x \leq b$ :



Die hellgrauen Flächenstücke liegen oberhalb der  $x$ -Achse und gehen positiv in die Flächenbilanz  $I$  ein, die dunkelgrauen liegen unterhalb und gehen daher negativ ein. Das bestimmte Integral erhält man als Grenzwert einer Folge von Riemanschen Summen. Man betrachtet die Approximation der gesuchten Fläche durch Rechtecke (Quader), die elementargeometrisch berechnet werden können:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Dabei bezeichnen die Punkte  $f(p_i)$  Auswertungen der Funktion auf jedem Teilstück des Intervalls  $[a, b]$  der Länge  $\Delta x_i$ . Details dazu sind im Kapitel 6 der Vorlesung „Ingenieurmathematik 1“ nachzulesen.

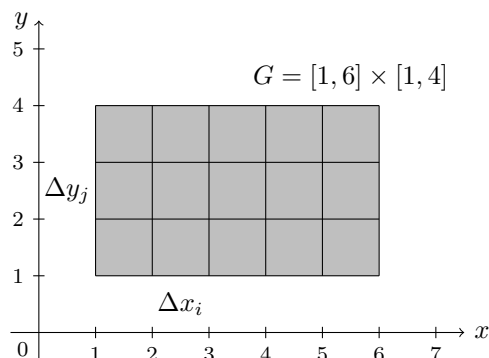
### 4.1 Zweidimensionale Bereichsintegrale (Polarkoordinaten und Jacobi-Matrix)

Es sei  $G = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Teilmenge (**Gebiet/Bereich**) und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  ein Skalarfeld.

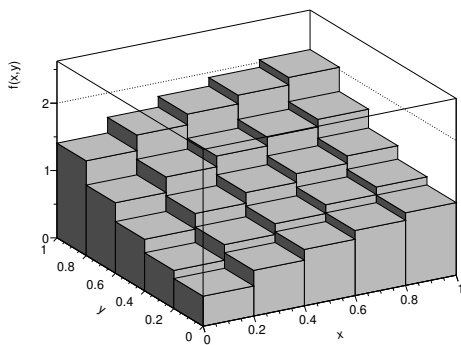
Das Volumen zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ - $y$ -Ebene berechnet sich approximativ durch eine Summe von Quadern des Volumens  $f(p_i, q_j) \Delta x_i \Delta y_j$ :

$$V \approx V_n = \sum_{i,j=1}^n f(p_i, q_j) \Delta x_i \Delta y_j \quad (\text{Riemansche Summe})$$

Die  $n$  Rechtecke mit Fläche  $\Delta x_i \Delta y_j$  überdecken das Gebiet  $G$ , über das integriert werden soll, vollständig:



In nebenstehender Skizze ist  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  und  $j \in \{1, 2, 3\}$ , also eine Unterteilung von  $G$  in insgesamt  $n = 15$  Rechtecke.



Die Idee des Riemann-Integrals besagt, dass für sehr große  $n \in \mathbb{N}$  das Volumen zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ - $y$ -Ebene durch das Volumen  $V_n$  sehr gut approximiert wird. Im Grenzwert wird so der Wert des bestimmten Integrals definiert:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n f(p_i, q_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

**Definition 4.1** Eine Funktion  $f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **integrierbar über  $G$** , wenn jede Folge Riemannscher Summen zu immer feiner werdenden Zerlegungen von  $G$  in Teilflächen gegen denselben Grenzwert konvergiert. Dieser Grenzwert wird dann das **bestimmte Integral** (Doppelintegral, Bereichsintegral, Gebietsintegral) von  $f$  über  $G$  genannt und geschrieben als

$$V = \iint_G f(x, y) \, dA$$

#### Bemerkungen

1. Das Integral  $\iint_G f(x, y) \, dA$  entspricht einer Volumenbilanz: Volumenanteile oberhalb der  $x$ - $y$ -Ebene werden positiv gezählt, solche unterhalb gehen negativ ins Integral ein.
2. Integriert man die konstante Funktion 1 über  $G$ , so erhält man den Flächeninhalt  $A$  des zugrundeliegenden Integrationsbereichs:  $\iint_G 1 \, dA = A$   
 → Dies ist analog zum eindimensionalen Fall für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x) = 1$  zu verstehen:

$$\int_a^b 1 \, dx = \int_a^b 1 \, dx = b - a$$

3. Es sind unterschiedliche Schreibweisen des Doppelintegrals möglich (alle mit gleicher Bedeutung):

$$\iint_G f(x, y) \, dA = \iint_G f(x, y) \, dG = \iint_G f(x, y) \, d(x, y)$$

4. Falls  $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar sind und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so gilt Linearität:

$$\iint_G (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dA = \alpha \iint_G f(x, y) \, dA + \beta \iint_G g(x, y) \, dA$$

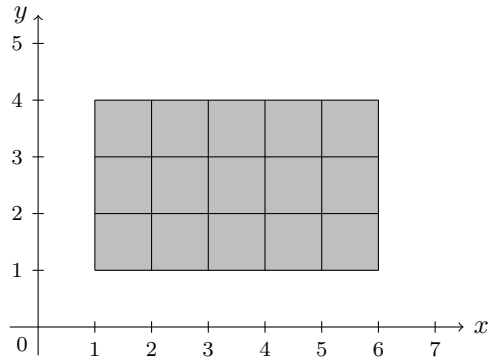
5. Falls  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $G = G_1 \cup G_2$  mit  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ , so ist

$$\iint_G f(x, y) \, dA = \iint_{G_1} f(x, y) \, dA + \iint_{G_2} f(x, y) \, dA$$

Frage: Wie lassen sich (2D-)Bereichsintegrale berechnen? Gibt es so etwas wie (2D-)Stammfunktionen?

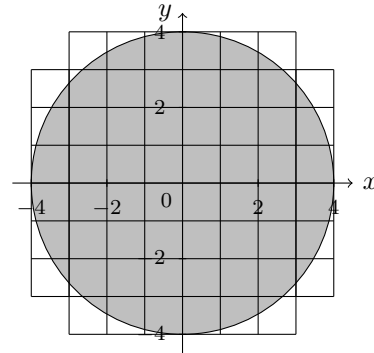
→ Man führt  $\iint_G f(x, y) \, dA$  operativ auf die Integration nach einer Variable zurück. Dabei ist ausschlaggebend, wie das Gebiet  $G$  beschaffen ist. Die Geometrie von  $G$  bestimmt, wie sich das Doppelintegral „knacken“ lässt.

→ Im einfachsten Fall ist  $G$  selbst ein Rechteck, d.h. die Zerlegung in  $x$ - und  $y$ -Richtung können unabhängig voneinander erfolgen (siehe nachstehend die Skizze im linken Panel). In so genannten Normalbereichen sind die beiden Richtungen (im Allgemeinen) voneinander abhängig (siehe Skizze im rechten Panel).



$$G = [1, 6] \times [1, 4]$$

→ In  $y$ -Richtung kann unabhängig von  $x \in [1, 6]$  diskretisiert/integriert werden.



$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$$

→ In  $y$ -Richtung muss abhängig von  $x \in [-4, 4]$  diskretisiert/integriert werden.

Hinweis: Die Geometrie von  $G$  ist wesentlich für die Berechnung des Integrals  $\iint_G f(x, y) \, dA$ . Die Wahl geeigneter Koordinaten ist in vielen Fällen mindestens hilfreich zur Berechnung des Integrals:

→ Rechtecke sind in kartesischen Koordinaten leicht zu behandeln.

→ Kreise sind in Polarkoordinaten leicht zu behandeln. In dem späteren Abschnitt „Polarkoordinaten bei Doppelintegralen“ wird dies im Detail diskutiert.

**Satz 4.2** Sei  $G = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Rechteck und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt:

$$\iint_G f(x, y) \, dA = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

**Beispiel 4.1** Die beiden folgenden Beispiele illustrieren die Integration über Rechtecke:

(i) Es sei  $G = [1, 3] \times [0, 1]$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 - xe^y + \sqrt{y}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \iint_G f(x, y) \, dA = \int_1^3 \left( \int_0^1 (x^2 - xe^y + \sqrt{y}) \, dy \right) dx \\ &= \int_1^3 \left( \left[ x^2 y - xe^y + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \right) dx \\ &= \int_1^3 \left( x^2 + x(1 - e) + \frac{2}{3} \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} x^3 + \frac{1 - e}{2} x^2 + \frac{2}{3} x \right]_1^3 = 14 - 4e \approx 3,1 \end{aligned}$$

Es ergibt sich das gleiche Ergebnis, wenn man zuerst nach  $x$  und dann nach  $y$  integriert:

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \iint_G f(x, y) \, dA = \int_0^1 \left( \int_1^3 (x^2 - xe^y + \sqrt{y}) \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2e^y + x\sqrt{y} \right]_1^3 \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{26}{3} - 4e^y + 2\sqrt{y} \right) dy \\ &= \left[ \frac{26}{3}y - 4e^y + \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 14 - 4e \approx 3,1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

(ii)  $f(x, y) = xy^2 + \cos(x)(1 - y)$  mit  $G = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \iint_G f(x, y) \, dA = \int_0^2 \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (xy + \cos(x)(1 - y)) \, dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left( \left[ \frac{1}{2}x^2y^2 + \sin(x)(1 - y) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) dy \\ &= \int_0^2 (2 - 2y) \, dy = [2y - y^2]_0^2 = 0 \end{aligned}$$

Die Volumina oberhalb sowie unterhalb der  $x$ - $y$ -Ebene sind identisch, weshalb sich in der Gesamtbilanz des Integrals eine Null ergibt.

### Definition 4.3

- Eine Teilmenge  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt **Normalbereich** bezüglich der  $x$ -Achse ( $G_x$ ), falls

$$G = G_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

mit gewissen Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  und stetigen Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2$  geschrieben werden kann.

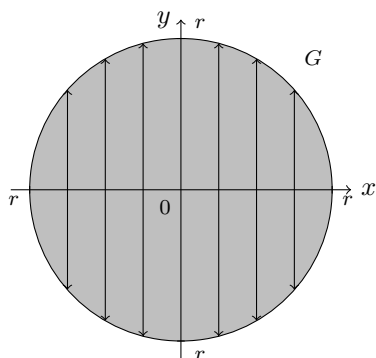
- Eine Teilmenge  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt **Normalbereich** bezüglich der  $y$ -Achse ( $G_y$ ), falls

$$G = G_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ und } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

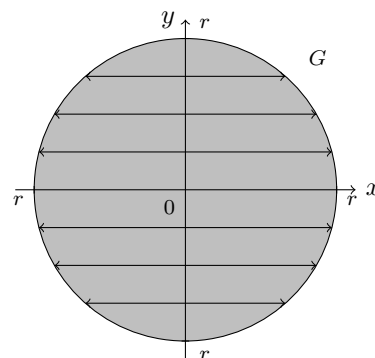
mit gewissen Zahlen  $c, d \in \mathbb{R}$  und stetigen Funktionen  $\psi_1, \psi_2$  geschrieben werden kann.

### Beispiel 4.2

(i) Ein Kreis  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$  ist ein Normalbereich bezüglich beider Achsen:



Für  $a = -r$ ,  $b = r$  und  $\varphi_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$  und  $\varphi_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  ist  $G$  ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse.



Für  $c = -r$ ,  $d = r$  und  $\psi_1(y) = -\sqrt{r^2 - y^2}$  und  $\psi_2(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$  ist  $G$  ein Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse.

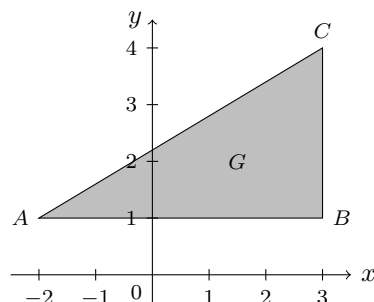
- (ii) Das Dreieck  $G$  mit Ecken  $A(-2, 1)$ ,  $B(3, 1)$  und  $C(3, 4)$  ist ebenfalls ein Normalbereich bezüglich beider Achsen:

Es ist

$$G_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq \frac{11}{5} + \frac{3}{5}x\}$$

und

$$G_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 4, -\frac{11}{3} + \frac{5}{3}y \leq x \leq 3\}$$



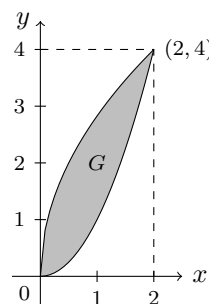
- (iii) Das Gebiet  $G$  wird von den Graphen der beiden Funktionen  $f(x) = 2\sqrt{2x}$  und  $g(x) = x^2$  eingeschlossen. Es ist ebenfalls ein Normalbereich bezüglich beider Achsen:

Es ist

$$G_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2\sqrt{2x}\}$$

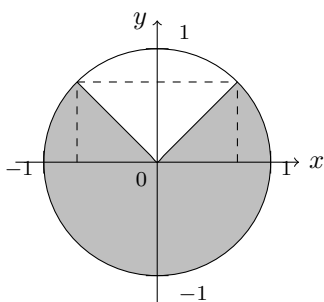
und

$$G_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, \frac{1}{8}y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$$



- (iv) Es gibt allerdings auch Fälle, in denen sich  $G$  durch einen Normalbereich nur entweder bezüglich der  $x$ -Achse oder bezüglich der  $y$ -Achse darstellen lässt. Die folgende nicht-konvexe Menge  $G_V$  lässt sich nur als Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse darstellen:

$$G_V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \leq |x|\}$$



Das herausgeschnittene Kreissegment liegt bei  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  mit der Höhe  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .  $G_V$  ist ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse, der dargestellt wird durch  $a = -1$ ,  $b = 1$  und für  $x \in [a, b] = [-1, 1]$  durch

$$\varphi_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } x \in [-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1] \\ |x| & \text{für } x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{cases}$$

Es ist nicht möglich,  $G_V$  als Normalbereich Bezüglich der  $y$ -Achse darzustellen, da es z.B. für  $y = \frac{1}{2}$  einen nicht-zusammenhängenden Bereich gäbe, über den parallel zur  $x$ -Achse integriert werden müsste:  $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}] \subset [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ .

#### Satz 4.4 (Doppelintegral auf Normalbereichen)

1. Wenn  $f$  stetig auf dem Normalbereich

$$G = G_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

ist, dann gilt

$$\iint_G f(x, y) \, dA = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

2. Wenn  $f$  stetig auf dem Normalbereich

$$G = G_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ und } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

ist, dann gilt

$$\iint_G f(x, y) \, dA = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

### Beispiel 4.3

(i) Betrachte den Einheitskreis  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Wir wissen, dass  $G$  ein Normalbereich sowohl bezüglich der  $x$ - als auch bezüglich der  $y$ -Achse ist. In diesem Beispiel betrachte man

$$G = G_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

mit  $\psi_{1,2}(y) = \mp \sqrt{1 - y^2}$ .

Das zu integrierende Skalarfeld laute  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = (x - y)^2$ . Es gilt für das Doppelintegral:

$$I = \iint_G f(x, y) \, dA = \int_{-1}^1 \left( \underbrace{\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x - y)^2 \, dx}_{=: I(y)} \right) dy$$

Führt man zu nächst die Integration nach  $x$  aus, er erhält man in Abhängigkeit von  $y$ :

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x - y)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{3} (x - y)^3 \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{1}{3} x^3 - x^2 y + x y^2 - \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{1-y^2} + \frac{4}{3} y^2 \sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

Dieses Zwischenergebnis ist über  $y$  zu integrieren:

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 \left( \frac{2}{3} \sqrt{1-y^2} + \frac{4}{3} y^2 \sqrt{1-y^2} \right) dy$$

Per Substitution lassen sich die beiden folgenden Stammfunktionen finden:

- ohne Vorfaktor:  $\int \sqrt{1-y^2} \, dy = \frac{1}{2} \left( y \sqrt{1-y^2} + \arcsin(y) \right) + c$
- quadratischer Vorfaktor:  $\int y^2 \sqrt{1-y^2} \, dy = \frac{1}{8} \left( y(2y^2 - 1) \sqrt{1-y^2} + \arcsin(y) \right) + c$

Unter Nutzung dieser beiden Stammfunktionen findet man nun direkt

$$\Rightarrow I = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \left( y \sqrt{1-y^2} + \arcsin(y) \right) \Big|_{-1}^1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} \left( y(2y^2 - 1) \sqrt{1-y^2} + \arcsin(y) \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$$



(ii) Man betrachte das bereits zuvor diskutierte Gebiet

$$G_V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \leq |x|\}$$

In der Diskussion der Geometrie von  $G_V$  hat sich gezeigt, dass  $G_V$  als Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse geschrieben werden kann, nicht aber als Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse. Es gilt:

$$G_V = G_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

mit den  $x$ -abhängigen Integrationsgrenzen der zweiten Variable  $y$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -\sqrt{1-x^2} \\ \varphi_2(x) &= \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } x \in [-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1] \\ |x| & \text{für } x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{cases} \end{aligned}$$

Das zu integrierende Skalarfeld laute  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 y^2$ . Es gilt für das Doppelintegral:

$$\begin{aligned} I &= \iint_G x^2 y^2 \, dA = \int_{-1}^1 \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} x^2 y^2 \, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y^2 \, dy \right) dx \quad \left. \vphantom{\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}} \right\} A \\ &\quad + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{|x|} x^2 y^2 \, dy \right) dx \quad \left. \vphantom{\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \right\} B \\ &\quad + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y^2 \, dy \right) dx \quad \left. \vphantom{\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1} \right\} C \end{aligned}$$

Die Beiträge zum Integral  $I = A + C + B$  werden im Folgenden nun schrittweise ausgewertet:

**A** Es ist  $A = \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} I(x) \, dx$  zu berechnen mit

$$I(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y^2 \, dy = \frac{1}{3} x^2 y^3 \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3} x^2 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Es folgt unter Verwendung der Stammfunktion

$$\int x^2 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{1}{48} \left( x(-3+14x^2+8x^4)\sqrt{1-x^2} + 3 \arcsin(x) \right) + c$$

und der Auswertung  $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4}$  das gesuchte Integral:

$$\Rightarrow A = \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} I(x) \, dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2}{3} x^2 (1-x)^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{3\pi-4}{288}$$

**B** Es ist  $B = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \tilde{I}(x) \, dx$  zu berechnen mit

$$\tilde{I}(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{|x|} x^2 y^2 \, dy = \frac{1}{3} x^2 y^3 \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{|x|} = \frac{1}{3} \left( x^4 |x| - x^2 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right)$$

Da  $\tilde{I}(x)$  eine gerade Funktion ist, folgt für den gesuchten Beitrag

$$\begin{aligned} B &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \tilde{I}(x) \, dx = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{3} \left( x^5 + x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^5 \, dx + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= \frac{1}{72} + \frac{3\pi + 4}{288} \end{aligned}$$

Das zweite Integral ergibt sich unter Nutzung der selben Stammfunktion, die bei der Berechnung des Beitrags  $A$  zum Einsatz kam, aber unter Berücksichtigung der hier vorliegenden Grenzen.

□ Es ist  $C = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 I(x) \, dx$  mit identischem  $I(x)$  wie beim Beitrag  $A$ . Da der Integrand  $I(x) = \frac{2}{3}x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$  eine gerade Funktion ist, ergibt sich aus der Symmetrie sofort

$$C = A = \frac{3\pi - 4}{288}$$

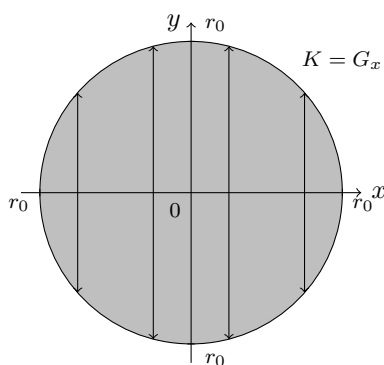
⇒ Fasst man alle Beiträge für das gesuchte Integral zusammen, so findet man abschließend:

$$I = A + B + C = 2A + B = \frac{\pi}{32}$$

### Polarkoordinaten bei Doppelintegralen

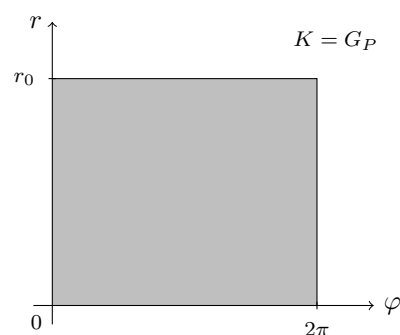
Integriert man eine Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf einem Kreis  $K$  mit Radius  $r_0 > 0$  definiert ist, so lässt sich mittels **Polarkoordinaten** das Doppelintegral oft deutlich vereinfachen. Eine ähnliche Beobachtung gab es bei der Diskussion der Höhenlinien im Beispiel 3.1.

#### Kartesische Darstellung von $K$



Integrationsbereich ist Normalbereich bezüglich  $x$ -Achse,  $K = G_x$ , d.h. die Integration in  $y$ -Richtung ist abhängig von  $x$ .

#### Polardarstellung von $K$



Integrationsbereich ist Rechteck,  $K = G_P$ , d.h. Integration in  $\varphi$ - bzw.  $r$ -Richtung kann unabhängig voneinander erfolgen.

Die Gegenüberstellung des Integrationsbereich  $K$  in kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten zeigt, dass die geometrische Komplexität von der Wahl der Koordinaten abhängt. Bei Doppelintegralen ist also spezifisch für einen Integrationsbereich ein möglichst optimales Koordinatensystem zu wählen. Während bei einem kreisförmigen Bereich die Integrationsgrenzen der kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  voneinander abhängig (linkes Panel in obiger Skizze), sind in Polarkoordinaten der

Winkel  $\varphi$  und der Radius  $r$  zwei voneinander unabhängige Dimensionen (rechtes Panel in obiger Skizze). Anstelle von der Integration über einen Normalbereich ist ein kreisförmiger Integrationsbereich in Polarkoordinaten unter Verwendung von Satz 4.2 zu behandeln.

Allgemein gilt für die Polarkoordinaten  $r \geq 0$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$ :

$$\boxed{\iint_G f(x, y) \, d(x, y) = \iint_{G_P} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \, r \, d(r, \varphi)}$$

wobei

- $G_P = \{(r, \varphi) \mid (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \in G\}$
- $x = r \cos(\varphi), y = r \sin(\varphi)$
- $dA = d(x, y) = dx \, dy = r \, d(r, \varphi) = r \, dr \, d\varphi$

Beim Übergang von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten ist insbesondere der Wechsel des Integrationsmaßes zu beachten:  $dx \, dy = r \, dr \, d\varphi$ . Der zusätzliche Faktor  $r$  ist die Jacobi-Determinante für Polarkoordinaten, die nach den anschließenden Beispielen allgemein diskutiert wird.

#### Beispiel 4.4

- (i) Man betrachte einen Kreis  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r_0^2\}$  mit Radius  $r_0 > 0$ . Sein Flächeninhalt  $A = r_0^2 \pi$  ist elementargeometrisch bekannt und soll zunächst unter Verwendung von kartesischen Koordinaten und anschließend mittels Polarkoordinaten berechnet werden. Dazu ist die konstante Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}, f \equiv 1$  über  $K$  zu integrieren:

Integration in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} A &= \iint_K f(x, y) \, dA = \int_{-r_0}^{r_0} \int_{-\sqrt{r_0^2-x^2}}^{\sqrt{r_0^2-x^2}} 1 \, dy \, dx \\ &= \int_{-r_0}^{r_0} 2\sqrt{r_0^2-x^2} \, dx \\ &= 2r_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) \, du \\ &= 2r_0^2 \cdot \frac{1}{2} [u + \sin(u) \cos(u)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = r_0^2 \pi \quad \checkmark \end{aligned}$$

Dabei wurde die Substitution  $x = r_0 \sin(u)$  mit  $dx = r_0 \cos(u) \, du$  genutzt.

Integration in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} A &= \iint_K f(x, y) \, dA = \iint_{G_P} 1 \, r \, d(r, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} r \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{r_0} r \, dr = r_0^2 \pi \quad \checkmark \end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass die Integration in Polarkoordinaten ebenfalls auf das erwartete Ergebnis führt. Nach dem Wechsel des Koordinatensystems ergibt sich eine im Vergleich zu den kartesischen Koordinaten einfachere Integration ohne Substitution und Beachtung etwaiger Integrationsreihenfolgen.

- (ii) Man betrachte das Skalarfeld  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = (x - y)^2$ , das auf dem Einheitskreis  $K$  definiert ist. Die Berechnung in kartesischen Koordinaten wurde bereits zuvor in Beispiel 4.3(i) mit relativ großem Aufwand durchgeführt. Nachfolgend zeigt sich, dass das selbe Ergebnis unter Verwendung von Polarkoordinaten auch deutlich einfacher gefunden werden kann:

Drückt man  $f$  in Polarkoordinaten,  $x = r \cos(\varphi)$ ,  $y = r \sin(\varphi)$  aus, so gilt:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \\ \Rightarrow f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) &= r^2 - 2r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Damit folgt für das gesuchte Doppelintegral

$$\begin{aligned} \iint_K f(x, y) \, dA &= \iint_{G_P} (r^2 - 2r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \, r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 - 2r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \, r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^1 (r^3 \cdot 2\pi + 0) \, dr = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Bei der Ausführung der  $\varphi$ -Integrals ergibt sich aufgrund der  $2\pi$ -Periodizität von  $\cos(\varphi) \sin(\varphi)$  eine Stammfunktion, die ebenfalls  $2\pi$ -periodisch ist. Da diese in den Grenzen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 2\pi$  ausgewertet wird, ergibt sich ein Beitrag von 0 für den zweiten Summanden des Integranden. Da der erste Summand unabhängig von  $\varphi$  ist, ergibt sich ausschließlich der Faktor  $2\pi$ .

- (iii) Man betrachte erneut das Skalarfeld  $f : G_V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 y^2$  auf dem nicht-konvexen Gebiet

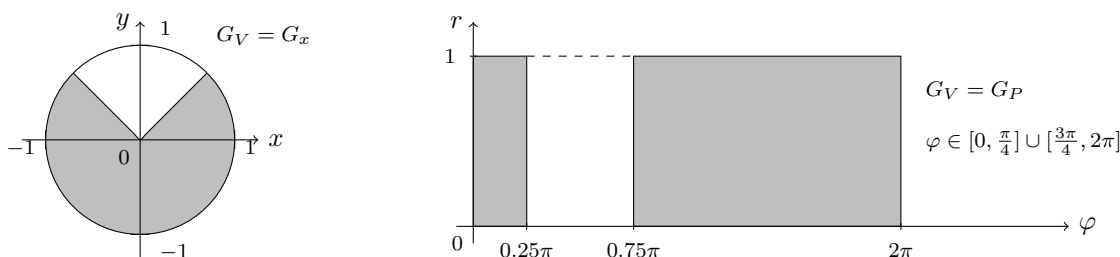
$$G_V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \leq |x|\}$$

Im Beispiel 4.3(ii) wurde sehr aufwändig in kartesischen Koordinaten

$$I = \iint_{G_V} x^2 y^2 \, dA = \frac{\pi}{32}$$

als Ergebnis gefunden. Ein Wechsel in Polarkoordinaten reduziert die Komplexität des Doppelintegrals wieder deutlich, wie im Folgenden dargestellt wird.

In Polarkoordinaten stellt sich das Gebiet  $G_V$  wie im rechten Panel gezeigt dar:



Aus dem Einheitskreis sind die Punkte mit  $\varphi \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  herausgeschnitten, weshalb sich in Polarkoordinaten für  $\varphi$  ein nicht-zusammenhängender Integrationsbereich ergibt. Dies ist für die Integration in Polarkoordinaten, entsprechend zu berücksichtigen:

$$G_\varphi = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$$

Für das gesuchte Integral ergibt sich also

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{G_V} f(x, y) \, dA = \iint_{G_P} r^4 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) \, r \, d(r, \varphi) \\
 &= \int_{G_\varphi} \int_0^1 r^5 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) \, dr \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{6} \int_{[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, 2\pi]} \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) \, d\varphi + \frac{1}{6} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{2\pi} \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{32} + \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{32} \right) = \frac{\pi}{32} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Da der Integrationsbereich  $G_\varphi$  aus zwei disjunkten Intervallen besteht, lässt sich das Integral über  $\varphi$  als Summe darstellen. Im letzten Schritt kam bei der eindimensionalen Integration nachstehende Stammfunktion zum Einsatz:

$$\int \cos^2(x) \sin^2(x) \, dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin(4x) + c$$

#### Hinweis zur weiteren Vereinfachung

Anstelle von  $\varphi \in [0, 2\pi]$  lässt sich der Definitionsbereich der Winkelkoordinate  $\varphi$  aufgrund ihrer  $2\pi$ -Periodizität etwa um  $\frac{\pi}{4}$  auf  $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4})$  verschieben. Für die Geometrie des Integrationsbereich  $G_V$  in Polarkoordinaten bedeutet dies, dass sich  $G_\varphi = [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, 2\pi]$  ebenfalls verschiebt. Der alternative Integrationsbereich lautet dann

$$\widetilde{G}_\varphi = \left[ \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right]$$

Der wesentliche Rechenschritt in obiger Integration stellt sich in diesem Fall wie folgt dar:

$$\dots = \frac{1}{6} \int_{\widetilde{G}_\varphi} \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) \, d\varphi = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{1}{6} \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) \, d\varphi = \frac{\pi}{32} \quad \checkmark$$

Erweiterung des mathematischen Werkzeugkastens: Die Jacobi-Matrix

Frage: Woher kommt bei den Polarkoordinaten der zusätzliche Faktor  $r$  beim Wechsel des Integrationsmaßes  $d(x, y) = r \, d(r, \varphi) = r \, dr \, d\varphi$ ?

Antwort 1: Der Faktor  $r$  muss aus Gründen der (physikalischen) Einheit auftreten.

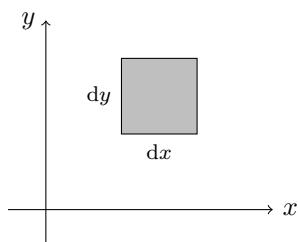
Wenn man  $I = \iint_G 1 \, dx \, dy$  berechnet, so ergibt sich die Fläche von  $G$ , d.h. das Integral  $I$  besitzt die Einheit  $\text{m}^2$ ; man schreibt  $[I] = \text{m}^2$ . Dies gilt, da  $[dx] = \text{m}$ ,  $[dy] = \text{m}$ , also  $[dx \, dy] = \text{m}^2$ .

Wechselt man in Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ , so gilt  $[r] = \text{m}$  und  $[\varphi] = 1$  (keine Einheit, reine Zahl). Damit gilt  $[dr \, d\varphi] = \text{m}$ , d.h. es handelt sich dabei nicht um eine Fläche, sondern um eine Länge. Mit dem zusätzlichen Faktor gilt  $[r \, dr \, d\varphi] = \text{m}^2$ .

Antwort 2: Aus der Betrachtung der (physikalischen) Einheit des Integrals  $I$  ergibt sich also die

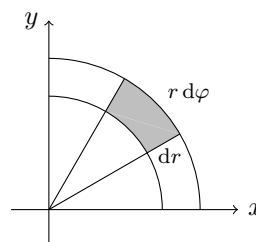
Notwendigkeit eines zusätzlichen Faktors einer Länge. Warum aber gerade  $r$  und nicht  $\frac{r}{2}$  oder  $42r$ ? Dazu betrachte man bei der Riemann-Summe die einzelnen Flächenelemente in den beiden unterschiedlichen Geometrien:

$$I = \iint_G 1 \, dx \, dy$$



Die Größe des Flächenstücks ist unabhängig vom Abstand zum Ursprung.

$$I = \iint_G r \, dr \, d\varphi$$



Die Größe des Flächenstücks ist abhängig vom Abstand zum Ursprung.

Aus der Skizze ist die Geometrie der infinitesimalen Flächenelemente ersichtlich, die im Grenzwert der Riemannschen Summe das Integral darstellen:

$$dA = dx \, dy = r \, dr \, d\varphi$$

Allgemeine Antwort: Der Wechsel von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten stellt eine verallgemeinerte Substitution dar. Im eindimensionalen Fall ist dies bereits bekannt:

$$\int_2^8 \sqrt{2x} \, dx \stackrel{u:=2x}{=} \int_4^{16} \sqrt{u} \frac{1}{2} \, du = \left[ \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_4^{16} = \frac{56}{3}$$

Dabei wurde die Substitution  $u := 2x$  durchgeführt, aus der  $du = 2 \, dx$  also  $dx = \frac{1}{2} \, du$  folgt. Neben veränderten Integrationsgrenzen ( $x \in [2, 8]$  jedoch  $u \in [4, 16]$ ) ist auch der Integrationsoperator durch die Substitution verändert worden: Es tritt ein zusätzlicher Faktor  $\frac{1}{2}$  auf.

Bei der Polarkoordinaten tritt analog ein zusätzlicher Faktor  $r$  auf. Aufgrund der Substitution

$$\begin{array}{lcl} x & = & r \cos(\varphi) = x(r, \varphi) \\ \underbrace{y}_{\text{alte Welt}} & = & \underbrace{r \sin(\varphi)}_{\text{neue Welt}} = y(r, \varphi) \end{array}$$

berechnet sich die so genannte **Jacobi-Matrix**

$$J := \frac{\partial (\text{alte Welt})}{\partial (\text{neue Welt})}$$

d.h. im Falle von kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  und einen Wechsel auf Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Die **Jacobi-Determinante** ist die Determinante der Jacobi-Matrix  $|J| = \det J$ . Durch sie ist im allgemeinen der zusätzliche Faktor bestimmt, der bei einer Substitution von einem Koordinatensystem in ein anders Koordinatensystem auftritt. Es gilt allgemein die **Transformationsformel**:

$$dA = dx \, dy = |J| \, dr \, d\varphi$$

In der Tat findet man als Determinante im Falle von Polarkoordinaten:

$$\det J = \cos(\varphi) \cdot r \cos(\varphi) - (-r \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi)) = r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r \quad \checkmark$$

#### Beispiel 4.5

- (i) Die Transformationsformel gilt auch für die bekannte Substitution in einer Dimension. Die Variable  $x$  aus der alten Welt wird transformiert in die neue Welt durch  $u = 2x$ , also folgt  $x = x(u) = \frac{1}{2}u$ . Damit ist die Jacobi-Matrix gegeben durch: (in diesem einfache Fall nur eine reelle Zahl, da  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^{1 \times 1}$ )

$$J = \frac{\partial (\text{alte Welt})}{\partial (\text{neue Welt})} = \frac{\partial x(u)}{\partial u} = \frac{1}{2}$$

Mit der Transformationsformel ergibt sich:

$$dx = |J| du = \frac{1}{2} du$$

- (ii) Modifiziert man die Polarkoordinaten mit Streckungsfaktoren  $a, b > 0$ , so erhält man **elliptische Koordinaten**, die durch folgende Transformation gegeben sind:

$$\begin{aligned}x &= ra \cos(\varphi) \\y &= rb \sin(\varphi)\end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix  $J \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  lautet in diesem Fall

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -ra \sin(\varphi) & rb \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

also folgt für die Determinante  $\det J = abr$ . Mit der Transformationsformel findet man also für elliptische Koordinaten:

$$dA = dx dy = rab dr d\varphi$$

- (iii) Die Jacobi-Matrix, Jacobi-Determinante und Transformationsformel gilt allgemein für jede Koordinatentransformation  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Im nächsten Kapitel werden speziell für  $n = 3$  die Zylinderkoordinaten sowie Kugelkoordinaten eingeführt. Sie stellen ein wertvolles Werkzeug bei der Berechnung von Dreifachintegralen dar.

## 4.2 Dreidimensionale Bereichsintegrale (Zylinder- und Kugelkoordinaten)

Geht von 2D auf  $nD$  über, so bleiben bei Mehrfachintegralen Konzepte wie Rechtecksgebiete, Normalbereiche, Transformationsformel etc. bestehen. Die Rechnungen erfolgen analog. Bei höheren Dimensionen gibt es aber mehr Möglichkeiten hinsichtlich Geometrie des Integrationsbereichs sowie den damit verbundenen Koordinaten. Für  $n = 3$  werden in diesem Kapitel insbesondere Zylinderkoordinaten sowie Kugelkoordinaten eingeführt. Für ein Skalarfeld  $f : G \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ist das Dreifachintegral

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dV$$

als 4-dimensionales Volumen zwischen dem Graphen von  $f$  und dem Gebiet  $G$  zu interpretieren.

Bemerkungen:

1. Ist  $G = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Quader, so gilt für stetige  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) \, dV &= \int_{c_1}^{c_2} \left( \int_{b_1}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz = \\ &= \int_{a_1}^{a_2} \left( \int_{b_1}^{b_2} \left( \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx = \dots \end{aligned}$$

Die Integrationsreihenfolge ist bei quaderförmigen Integrationsbereichen frei wählbar. Alle  $3! = 6$  Möglichkeiten führen auf das selbe Ergebnis.

2. Im Fall eines (verallgemeinerten) Normalbereichs der Form

$$G = \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq a_2, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

ist die Integrationsreihenfolge vorgegeben. Zuerst wird über die zweifach eingeschränkte Variable  $z$ , anschließend über die einfach eingeschränkte Variable  $y$  und zuletzt über die freie Variable  $x$  integriert:

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dV = \int_{a_1}^{a_2} \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left( \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

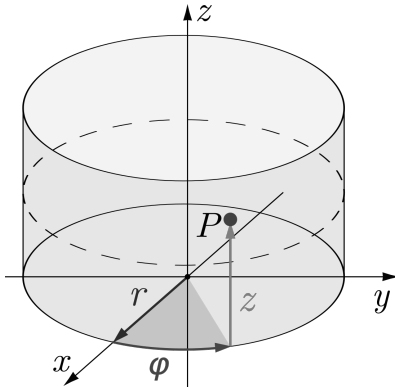
3. Analog zum 2D-Bereichsintegral gilt: Integriert man die konstante Funktion 1 über  $G$ , so erhält man das Volumen  $V$  des zugrundeliegenden Integrationsbereichs:  $\iiint_G 1 \, dV = V$ .

**Beispiel 4.6** Man betrachte den Quader  $Q = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1] \times [0, 2]$  mit Volumen  $V = 2\pi$ . Für die Funktion  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = (x - z) \exp(y - z^2)$  gilt:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^2 (xe^{y-z^2} - ze^{y-z^2}) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^2 (0 - \pi ze^{-z^2}) e^y \, dz \, dy \\ &= \int_0^2 (-\pi ze^{-z^2}) (e - 1) \, dz \\ &= \frac{1}{2} (e - 1) \pi \underbrace{\int_0^2 (-2ze^{-z^2}) \, dz}_{= e^{-z^2} \Big|_0^2 = e^{-4} - 1} = \frac{\pi}{2} (e - 1)(e^{-4} - 1) \approx -2,65 \end{aligned}$$



## Zylinderkoordinaten



Zylinderkoordinaten entsprechen übereinander gestapelten Polarkoordinaten. Zusätzlich zu  $(r, \varphi)$  tritt die kartesische  $z$ -Koordinate auf, die zusammen jeden Punkt im  $P$  eines Zylinders eindeutig beschreiben.

Betrachtet man einen Zylinder mit Radius  $r_0$  und Höhe  $h$ , so sind horizontale Schnitte durch den Zylinder stets identische Kreisscheiben mit dem gleichen Radius  $r_0$ :

$$\begin{aligned} Z &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq r_0^2, 0 \leq z \leq h\} \\ &= \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq z \leq h\} \end{aligned}$$

Quelle: Wikipedia (angepasst)

Die Transformation von kartesischen Koordinaten zu Zylinderkoordinaten ist für die  $x$ - und  $y$ -Koordinate identisch zu den zweidimensionalen Polarkoordinaten, die  $z$ -Koordinate wird direkt übernommen:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi) \\ \underbrace{z}_{\text{alte Welt}} &= \underbrace{z}_{\text{neue Welt}} \end{aligned}$$

Es lassen sich die Jacobi-Matrix sowie Jacobi-Determinante der Zylinderkoordinaten bestimmen:

$$J = \frac{\partial(\text{alte Welt})}{\partial(\text{neue Welt})} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|J| = r$$

Allgemein gilt für die Zylinderkoordinaten  $r \geq 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $z \in \mathbb{R}$ :

$$\iiint_G f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \iiint_{G_Z} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) r \, d(r, \varphi, z)$$

wobei

- $G_Z = \{(r, \varphi, z) \mid (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) \in G\}$
- $x = r \cos(\varphi)$ ,  $y = r \sin(\varphi)$ ,  $z = z$
- $dV = d(x, y, z) = dx \, dy \, dz = r \, d(r, \varphi, z) = r \, dr \, d\varphi \, dz$

### Beispiel 4.7

- (i) Zunächst soll das Volumen eines Zylinders  $Z$  mit Radius  $r_0 > 0$  und Höhe  $h > 0$  unter Verwendung der Zylinderkoordinaten berechnet werden. Das Volumen des Gebiets  $Z$  ergibt sich durch Integration über die konstante Funktion 1:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_Z 1 \, dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &= 2\pi \cdot h \cdot \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_0^{r_0} = r_0^2 \pi h \quad \checkmark \end{aligned}$$

Durch das Dreifachintegral ergibt sich das elementargeometrische Volumen eines Zylinders.

(ii) Man betrachte einen Kreiskegel für  $z \in [0, h]$ , dessen Radius mit wachsender Höhe gemäß

$$r = r(z) = r_0 - \frac{r_0}{h}z$$

abnimmt. Am Boden gilt  $r(0) = r_0$ , an der Spitze  $r(h) = 0$ . Der Kreiskegel lässt sich als Normalbereich darstellen:

$$K = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq z \leq h, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq r \leq r_0 - \frac{r_0}{h}z\}$$

Integriert man die konstante Funktion 1 über den Kreiskegel  $K$ , so ergibt sich sein Volumen:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K 1 \, dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0 - \frac{r_0}{h}z} r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &= 2\pi \int_0^h \underbrace{\left[ \frac{1}{2}r^2 \right]_0^{r_0 - \frac{r_0}{h}z}}_{= \frac{1}{2} \left( r_0^2 - 2\frac{r_0^2}{h}z + \frac{r_0^2}{h^2}z^2 \right)} dz \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[ r_0^2 z - \frac{r_0^2}{h}z^2 + \frac{r_0^2}{3h^2}z^3 \right]_0^h = \frac{1}{3}r_0^2\pi h \quad \checkmark \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall ergibt das Dreifachintegral das elementargeometrische Volumen eines Kreiskegels.

(iii) Mit Zylinderkoordinaten lässt sich auch das Volumen einer Kugel mit Radius  $r_0$  berechnen. Dazu betrachte man für  $z \in [-r_0, r_0]$  den von der Höhe abhängigen Radius

$$r = r(z) = \sqrt{r_0^2 - z^2}$$

Am Süd- sowie Nordpol der Kugel gilt  $r(-r_0) = r(r_0) = 0$ , am Äquator ist der Radius maximal  $r(0) = r_0$ . Es gilt also:

$$\begin{aligned} K &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r_0^2\} \\ &= \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{r_0^2 - z^2}, 0 \leq \varphi < 2\pi, -r_0 \leq z \leq r_0\} \end{aligned}$$

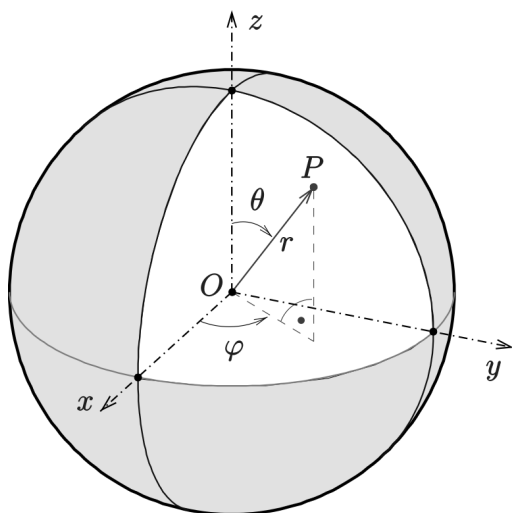
Integriert man die konstante Funktion 1 über die Kugel  $K$ , so ergibt sich ihr Volumen:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K 1 \, dV = \int_{-r_0}^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r_0^2 - z^2}} r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &= 2\pi \int_{-r_0}^{r_0} \left[ \frac{1}{2}r^2 \right]_0^{\sqrt{r_0^2 - z^2}} dz \\ &= 2\pi \int_{-r_0}^{r_0} \frac{1}{2}(r_0^2 - z^2) dz = \frac{4}{3}r_0^3\pi \quad \checkmark \end{aligned}$$

Das Dreifachintegral liefert das elementargeometrische Volumen einer Kugel.

Bemerkung: Die Kugel  $K$  mit Radius  $r_0$  ist in diesem Beispiel auch in kartesischen Koordinaten dargestellt. Es bleibt dem Leser überlassen, die Integration in kartesischen Koordinaten auszuprobieren und anschließend darüber zu urteilen, in welchem Koordinatensystem das Dreifachintegral leichter zu lösen ist.

Im Folgenden wird ein weiteres Koordinatensystem eingeführt, mit dem sich insbesondere das Volumen einer Kugel noch einfacher berechnen lässt: Kugelkoordinaten



Möchte man Punkte in einer Kugel mit Radius  $r_0 > 0$  beschreiben, so eignen sich die Koordinaten  $(r, \theta, \varphi)$ :

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq r_0^2\}$$

$$= \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

Der Abstand eines Punktes wird durch die Koordinate  $r$  beschrieben,  $\theta$  beschreibt die Abweichung von der Polrichtung (geographische Breite) und  $\varphi$  den Azimutwinkel (geographische Länge).

Quelle: Wikipedia (angepasst, CC BY-SA 4.0)

Die Transformation von kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten lautet:

$$\begin{array}{rcl} x & = & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y & = & r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \underbrace{z}_{\text{alte Welt}} & = & \underbrace{r \cos(\theta)}_{\text{neue Welt}} \end{array}$$

Es lassen sich die Jacobi-Matrix sowie Jacobi-Determinante der Kugelkoordinaten bestimmen:

$$J = \frac{\partial (\text{alte Welt})}{\partial (\text{neue Welt})} = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & \cos(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\theta) \\ r \cos(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & -r \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$$

$$|J| = r^2 \sin(\theta)$$

Allgemein gilt für die Kugelkoordinaten  $r \geq 0$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$ :

$$\boxed{\iiint_f (x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_{G_K} f(r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta)) r^2 \sin(\theta) d(r, \varphi, z)}$$

wobei

- $G_K = \{(r, \theta, \varphi) \mid (r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta)) \in G\}$
- $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$ ,  $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$ ,  $z = r \cos(\theta)$
- $dV = d(x, y, z) = dx dy dz = r^2 \sin(\theta) d(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$

#### Beispiel 4.8

- (i) Wie angekündigt, lässt sich unter Verwendung von Kugelkoordinaten das Volumen einer Kugel

mit Radius  $r_0 > 0$  einfach berechnen:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K 1 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_0} r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{1}{3} r_0^3 \cdot \underbrace{2\pi \int_0^\pi \sin(\theta) \, d\theta}_{=2} = \frac{4}{3} r_0^3 \pi \quad \checkmark \end{aligned}$$

- (ii) Man betrachte  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = \frac{1 + \exp(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  und die Einheitskugel  $K_1$  als Integrationsbereich. Es gilt:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{K_1} f(x, y, z) \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \frac{1 + e^{r^2}}{r} \cdot r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 (r + r e^{r^2}) \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= 2\pi \underbrace{\int_0^\pi \sin(\theta) \, d\theta}_{=2} \underbrace{\int_0^1 (r + r e^{r^2}) \, dr}_{=\frac{e}{2}} = 2\pi e \end{aligned}$$

- (iii) Ähnlich wie man von Polarkoordinaten zu 2D-elliptischen Koordinaten kommt, können mittels dreier Streckungsfaktoren 3D-elliptische Koordinaten definiert werden. Für  $a, b, c > 0$  ist

$$\begin{array}{rcl} x & = & ar \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y & = & br \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \underbrace{z}_{\text{alte Welt}} & = & \underbrace{cr \cos(\theta)}_{\text{neue Welt}} \end{array}$$

woraus sich über die Jacobi-Matrix  $J$  die Jacobi-Determinante ergibt zu:

$$|J| = r^2 abc \sin(\theta)$$

Damit lässt sich das Volumen eines Ellipsoids  $E$  mit den Halbachsen  $ar_0$ ,  $br_0$  und  $cr_0$  berechnen:

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{ar_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{br_0}\right)^2 + \left(\frac{z}{cr_0}\right)^2 \leq 1\} \\ &= \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \end{aligned}$$

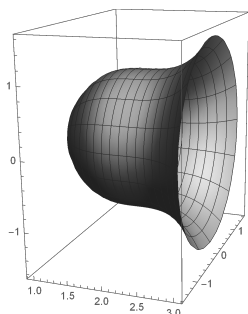
Integriert man die konstante Funktion 1 über  $E$ , so ergibt sich das elementargeometrische Volumen eines Ellipsoids:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_E 1 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_0} r^2 abc \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= abc \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_0} r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\varphi}_{=\frac{4}{3} r_0^3 \pi} = \frac{4}{3} r_0^3 abc \pi \quad \checkmark \end{aligned}$$

### 4.3 Anwendungen: Rotationskörper und Schwerpunkte

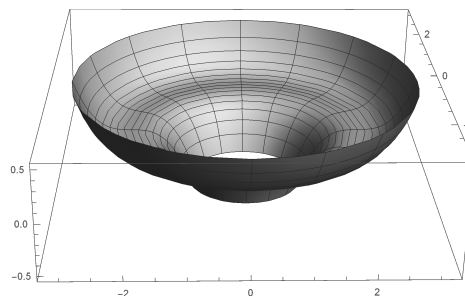
Es gibt zwei unterschiedliche Möglichkeiten, im dreidimensionalen Raum einen Rotationskörper zu erzeugen. In beiden Fällen betrachtet man den Graphen einer Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , der um die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse rotiert wird:

1) Drehung um die  $x$ -Achse



Es ist  $a < b$  vorausgesetzt.

2) Drehung um die  $y$ -Achse



Es ist  $0 \leq a < b$  und  $f(x) \geq 0$  vorausgesetzt.

Der entstehende Mantel schließt den Rotationskörper ein, dessen Volumen sich durch Zylinderkoordinaten beschreiben lässt:

ad 1) Das Volumen  $G$  bei Drehung um die  $x$ -Achse lässt sich beschreiben durch

$$G = \{(r, \varphi, x) \mid 0 \leq r \leq |f(x)|, \varphi \in [0, 2\pi), x \in [a, b]\}$$

Das Volumen von  $G$  ist also

$$\begin{aligned} V &= \iiint_G 1 \, dV = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{|f(x)|} r \, dr \, d\varphi \, dx \\ &= 2\pi \int_a^b \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_0^{|f(x)|} dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \end{aligned}$$

ad 2) Das Volumen  $G$  bei Drehung um die  $y$ -Achse lässt sich beschreiben durch

$$G = \{(r, \varphi, x) \mid 0 \leq a \leq r \leq b, \varphi \in [0, 2\pi), y \in [0, f(r)]\}$$

Das Volumen von  $G$  ist also

$$\begin{aligned} V &= \iiint_G 1 \, dV = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(r)} r \, dy \, d\varphi \, dr \\ &= 2\pi \int_a^b r f(r) \, dr = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx \end{aligned}$$

**Satz 4.5** (Volumen von Rotationskörpern)

1. Durch Rotation der Fläche, die durch den Graphen der Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die Geraden  $x = a$ ,  $x = b$  und die  $x$ -Achse begrenzt ist, um die  **$x$ -Achse** entsteht ein Körper mit Volumen

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

2. Es sei  $0 \leq a < b$ . Durch Rotation der Fläche, die durch den Graphen der Funktion  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ , die Geraden  $x = a$ ,  $x = b$  und die  $x$ -Achse begrenzt ist, um die **y-Achse** entsteht ein Körper mit Volumen

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Bemerkung: Gibt es Schnittpunkte des Graphen von  $f$  mit der Drehachse, so sind die Vorzeichen der einzelnen Teilvolumina fallbezogen festzulegen.

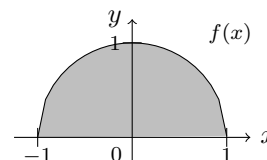
### Beispiel 4.9

- (i) Bereits in vorherigen Beispielen wurde das Volumen einer Kugel mit Radius  $r_0 > 0$  berechnet. Im Folgenden sollen zwei Varianten vorgestellt werden, mit denen sich die Kugel als Rotationskörper darstellen lässt.

- a) Rotation um die  $x$ -Achse

Betrachte  $f : [-r_0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sqrt{r_0^2 - x^2}$ , dessen Graph um die  $x$ -Achse rotiert wird:

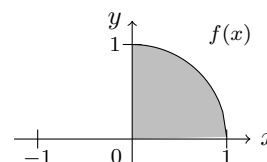
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r_0}^{r_0} \left( \sqrt{r_0^2 - x^2} \right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-r_0}^{r_0} (r_0^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \quad \checkmark \end{aligned}$$



- b) Rotation um die  $y$ -Achse

Betrachte  $f : [0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $f(x) = \sqrt{r_0^2 - x^2}$ , dessen Graph um die  $y$ -Achse rotiert eine Halbkugel ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= 2\pi \int_0^{r_0} x \sqrt{r_0^2 - x^2} dx \\ \Rightarrow V &= 4\pi \cdot \left[ -\frac{1}{3} (r_0^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{r_0} = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \quad \checkmark \end{aligned}$$



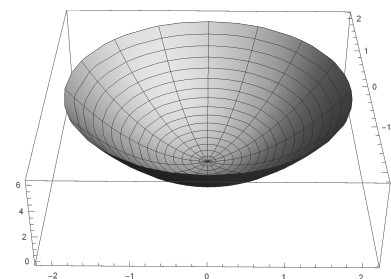
- (ii) Man betrachte für  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  mit dem Kreis  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r_0^2\}$  die Funktion  $f(x, y) = \frac{h}{r_0^2}(x^2 + y^2)$

→ Diese Graph dieser entspricht der Mantelfläche einer Paraboloids mit Höhe  $h$  und dortigem Öffnungsradius  $r_0$  dar.

Frage: Welches Volumen liegt innerhalb des Paraboloids?

Idee a) Zylinderkoordinaten

Idee b) Rotationskörper aus Box (Zylinder) herauschneiden



- a) Mit Zylinderkoordinaten lässt sich das Paraboloid beschreiben durch

$$P = \{0 \leq z \leq h, (r, \varphi, z) \mid \varphi \in [0, 2\pi), 0 \leq r \leq \Psi(z)\}$$

wobei die obere Integrationsgrenze von  $r$  sich aus der Bedingung

$$f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = \frac{h}{r_0^2} \cdot r^2 \stackrel{!}{=} z$$

zu

$$r = r_0 \sqrt{\frac{z}{h}} =: \psi(z)$$

ergibt. Damit folgt für das Volumen  $P$  des Paraboloids:

$$\begin{aligned} P &= \iiint_P 1 \, dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi(z)} r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &= 2\pi \int_0^h \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_0^{r_0 \sqrt{\frac{z}{h}}} = \frac{\pi}{2} r_0^2 h \quad \checkmark \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis bestätigt das elementargeometrische Volumen eines Ellipsoids.

- b) Man betrachte alternativ die Mantelfläche des Paraboloids, das durch Rotation der Funktion  $g : [0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $g(x) = \frac{h}{r_0^2} x^2$  um die  $z$ -Achse entsteht. Mittels Satz 4.5(2) berechnet man das Volumen unterhalb des Rotationskörpers. Um das Volumen oberhalb zu erhalten, muss man es aus der zylinderförmigen Umgebung (Box) mit Volumen  $V_{\text{Box}} = r_0^2 \pi h$  herausschneiden:

$$V = V_{\text{Box}} - 2\pi \int_0^{r_0} x g(x) \, dx = r_0^2 \pi h - 2\pi \cdot \frac{h}{r_0^2} \int_0^{r_0} x^2 \, dx = \frac{\pi}{2} r_0^2 h$$

Hinweis: Bei der Rechnung fällt auf, dass das Ergebnis „zufällig“ gerade die Hälfte der Box ist, aus der der Rotationskörper herausgeschnitten wird. Das Volumen oberhalb sowie unterhalb der Mantelfläche ist also gleich groß.

Im Kapitel 1 dieser Vorlesung wurde im Satz 1.5 die Berechnung von Schwerpunkten von Flächen homogener Dichte vorgestellt. Mit den Methoden der mehrdimensionalen Integralrechnung lässt sich dieser Ergebnis verallgemeinern. Die beiden folgenden Sätze zeigen, wie sich die Koordinaten des Schwerpunktes einer Fläche oder eines Volumens mit inhomogener Dichte berechnen lassen:

**Satz 4.6** (Schwerpunktberechnung mit Doppelintegralen)

1. Gegeben sei eine Fläche  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  mit Dichtefunktion  $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ .

Dann gilt für die Koordinaten  $x_S, y_S$  des **Schwerpunkts** von  $G$ :

$$x_S = \frac{1}{m} \iint_G x \rho(x, y) \, dA \quad \text{und} \quad y_S = \frac{1}{m} \iint_G y \rho(x, y) \, dA$$

wobei  $m = \iint_G \rho(x, y) \, dA$  die Masse von  $G$  ist.

2. Falls die Dichte  $\rho$  konstant ist, dann vereinfachen sich die Formeln zu

$$x_S = \frac{1}{A} \iint_G x \, dA \quad \text{und} \quad y_S = \frac{1}{A} \iint_G y \, dA$$

wobei  $A = \iint_G 1 \, dA$  der Flächeninhalt von  $G$  ist.

**Satz 4.7** (Schwerpunktsberechnung mit Dreifachintegralen)

1. Gegeben sei ein Körper  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  mit Dichtefunktion  $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ .

Dann gilt für die Koordinaten  $(x_i)_S$  ( $i = 1, 2, 3$ ) des **Schwerpunkts** von  $G$ :

$$(x_i)_S = \frac{1}{m} \iiint_G x_i \rho(x_1, x_2, x_3) dV$$

wobei  $m = \iiint_G \rho(x_1, x_2, x_3) dV$  die Masse von  $G$  ist.

2. Falls die Dichte  $\rho$  konstant ist, vereinfachen sich die Formeln zu ( $i = 1, 2, 3$ )

$$(x_i)_S = \frac{1}{V} \iiint_G x_i dV$$

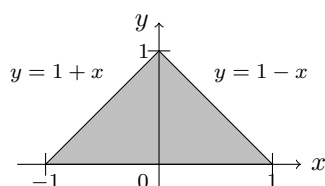
wobei  $V = \iiint_G 1 dV$  das Volumen von  $G$  ist.

Bemerkung: Aus dem letzten Satz lässt sich leicht die Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen  $n \in \mathbb{N}$ , d.h. für  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , mit  $n$ -fachen Integralen formulieren.

**Beispiel 4.10**

- (i) Es sei  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 - |x|\}$  mit Dichteverteilung

$$\rho : G \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \rho(x, y) = y^4(1 - x^2)$$



Je größer der Abstand von der  $y$ -Achse ist, umso geringer ist die Dichte. Je höher der Wert der  $y$ -Koordinate, umso höher ist auch die Dichte.

Aus der Symmetrie  $\rho(-x, y) = \rho(x, y)$  auf dem Gebiet  $G$  ist zu erwarten, dass  $x_S = 0$  gilt.

Unter Berücksichtigung der Flanken  $y = 1 + x$  und  $y = 1 - x$  des Gebiets  $G$  lässt es sich als Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse schreiben:

$$G = G_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y - 1 \leq x \leq 1 - y\}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{m} \iint_G x \rho(x, y) dA \\ &= \frac{1}{m} \int_0^1 \underbrace{\int_{y-1}^{1-y} y^4 x (1 - x^2) dx}_{=0} dy = 0 \end{aligned}$$

Die Integration nach  $x$  führt zu einem verschwindenden Integral, da ein ungerader Integrand über ein zur Null symmetrisches Intervall integriert wird ( $1 - y = -(y - 1)$ ).



Für die  $y$ -Koordinate des Schwerpunkts ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{m} \iint_G y \rho(x, y) \, dA \\ &= \frac{1}{m} \int_0^1 \underbrace{\int_{y-1}^{1-y} y^5 (1-x^2) \, dx}_{=\frac{2}{3}(y^3-3y^2+2)} \, dy \\ &= \frac{2}{3m} \int_0^1 \int_0^1 (y^8 - 3y^7 + 2y^5) \, dy = \frac{5}{108m} \end{aligned}$$

Die Masse berechnet sich analog mit einem Integranden, der einen Faktor  $y$  weniger enthält:

$$\begin{aligned} m &= \iint_G \rho(x, y) \, dA \\ &= (\dots) = \frac{2}{3} \int_0^1 (y^7 - 3y^6 + 2y^4) \, dy = \frac{9}{140} \end{aligned}$$

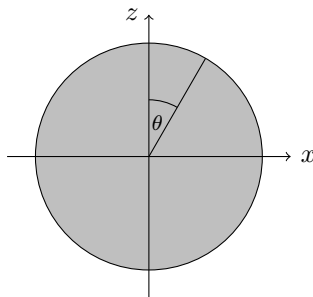
Insgesamt ergibt sich für die  $y$ -Koordinate des Schwerpunkts:  $y_S = \frac{5}{108m} = \frac{175}{243} \approx 0,72$

- (ii) Man betrachte eine Kugel mit Radius  $r_0 > 0$ , deren Dichte abhängig ist von geographischen Breite ist:

$$\rho : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \rho(\theta) = 2 - \cos(\theta)$$

Je weiter nördlich man sich in der Kugel befindet, umso geringer ist die Dichte. Die höchste Dichte liegt am Südpol, die niedrigste am Nordpol:

$$\rho(0) = 1 \leq \rho(\theta) \leq \rho(\pi) = 3$$



Querschnitt für  $y = 0$

Aufgrund der Symmetrie der Kugel und einer Dichte, die nur von  $\theta$  abhängt, ist zu erwarten, dass die  $x$ - sowie  $y$ -Komponente des Schwerpunkts verschwinden.

Die Masse der Kugel ergibt sich unter Verwendung von Kugelkoordinaten mit Jacobi-Determinante  $|J| = r^2 \sin(\theta)$  zu:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_K \rho(x, y, z) \, dV = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2 - \cos(\theta)) \cdot \underbrace{r^2 \sin(\theta)}_{|J|} \, d\theta \, d\varphi \, dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{3} r_0^3 \underbrace{\int_0^\pi (2 \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta)) \, d\theta}_{=[-2 \cos(\theta) - \frac{1}{2} \sin^2(\theta)]_0^\pi = 4} = \frac{8}{3} \pi r_0^3 \end{aligned}$$

Die  $x$ - und  $y$ -Komponenten des Schwerpunkts verschwinden erwartungsgemäß. Mit der Transformation in Kugelkoordinaten  $x = r \cos(\varphi) \sin(\theta)$  und  $y = r \sin(\varphi) \sin(\theta)$  ergibt sich wieder mit der Dichtefunktion  $\rho(\theta)$  und der Jacobi-Determinante:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{m} \iiint_K x \rho(x, y, z) \, dV \\ &= \frac{1}{m} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \cos(\varphi) \sin(\theta) \cdot (2 - \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr = 0 \end{aligned}$$

Das Integral verschwindet sofort bei Integration nach  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , da der Integrand den  $2\pi$ -periodischen Faktor  $\cos(\varphi)$  enthält.

Analog ergibt sich für die  $y$ -Komponente:

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{m} \iiint_K y \rho(x, y, z) \, dV \\ &= \frac{1}{m} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \sin(\varphi) \sin(\theta) \cdot (2 - \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr = 0 \end{aligned}$$

Das Integral verschwindet sofort bei Integration nach  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , da der Integrand den  $2\pi$ -periodischen Faktor  $\sin(\varphi)$  enthält.

Für die  $z$ -Komponente findet man zunächst:

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{m} \iiint_K z \rho(x, y, z) \, dV \\ &= \frac{1}{m} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \cos(\theta) \cdot (2 - \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\ &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4} r_0^4 \cdot 2\pi \underbrace{\int_0^\pi (2 \cos(\theta) \sin(\theta) - \cos^2(\theta) \sin(\theta)) \, d\theta}_{= [-\cos^2(\theta) + \frac{1}{3} \cos^3(\theta)]_0^\pi = -\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3m} \pi r_0^4 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich  $z_S = -\frac{1}{3m} \pi r_0^4 = -\frac{r_0}{8}$ , d.h. der Schwerpunkt befindet sich in der unteren Halbkugel und relativ nahe am Mittelpunkt der Kugel.

Weiterführende Bemerkung: Dieses Ergebnis für  $z_S$  hängt tatsächlich nur davon ab, wie sich die Dichte vom Südpol zum Nordpol hin *verändert*.

Genauer: Betrachtet man für ein beliebiges  $a \geq 1$  (Dichten können nicht negativ sein) die verallgemeinerte Dichte  $\rho_a(\theta) = a - \cos(\theta)$ , so findet man *unabhängig* von  $a$  das gleiche Ergebnis für  $z_S$ . Dies ergibt sich aus dem letzten Integral, das sich für  $\rho_a(\theta)$  anstelle von  $\rho_2(\theta)$  darstellt als:

$$\int_0^\pi (a \cos(\theta) \sin(\theta) - \cos^2(\theta) \sin(\theta)) \, d\theta = \left[ -\frac{a}{2} \cos^2(\theta) + \frac{1}{3} \cos^3(\theta) \right]_0^\pi = -\frac{2}{3}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von  $a$ , da sich  $\cos(\pi)$  und  $\cos(0)$  nur um das Vorzeichen unterscheiden, d.h. da  $\cos^2(\pi) = \cos^2(0) = 1$  gilt.

## 5 Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind ein äußerst weitläufiges Gebiet der Mathematik mit Anwendungen in allen/den meisten Wissenschaftsbereichen:

- Physik: Maxwell-Gleichungen, Schrödingergleichung, ...
- Chemie: Radioaktiver Zerfall, Diffusionsgleichung, ...
- Wirtschaft: Logistische Differentialgleichung, Black-Scholes-Gleichung, ...
- Geographie: Seismische Wellen, ...

Während bei einer Gleichung eine Zahl  $x$  gesucht wird, ist bei einer Differentialgleichung nach einer kompletten Funktion  $y$  gesucht:

<u>Gleichung</u>	<u>Differentialgleichung</u>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>x^2 - 2x - 8 = 0</math> Lösung: <math>x_1 = -2, x_2 = 4</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>y'(x) = y(x)</math> Lösung: <math>y(x) = a \cdot e^x</math> mit <math>a \in \mathbb{R}</math></li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\sin(x) = \cos(x)</math> Lösung: <math>x \in \{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(y'(x))^2 = y(x) - 1</math> Lösung: <math>y(x) = 1 + \frac{1}{4}(x + a)^2</math> mit <math>a \in \mathbb{R}</math></li> </ul>

**Definition 5.1** Eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

mit einer Funktion  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  für eine gesuchte Funktion  $y$  und ihre ersten  $n$  Ableitungen  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  sowie ihr Argument  $x$  heißt **gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) der Ordnung  $n$** . Man spricht auch von einer DGL  $n$ -ter Ordnung.

Eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion  $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y(x)$ , heißt **Lösung der DGL**, falls für alle  $x \in I$  gilt:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Die **allgemeine Lösung einer DGL** ist die Menge aller Lösungen der DGL.

Werden zusätzlich zur DGL für ein  $x_0 \in \mathbb{R}$  die Funktionswerte  $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0) \in \mathbb{R}$  vorgegeben, so spricht man von einem **Anfangswertproblem (AWP)**.

Werden zusätzlich zur DGL für  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  die Funktionswerte  $y(x_1), \dots, y(x_n) \in \mathbb{R}$  vorgegeben, so spricht man von einem **Randwertproblem (RWP)**.

Bemerkung: In dieser Vorlesung werden ausschließlich gewöhnliche Differentialgleichungen betrachtet. In den oben genannten Anwendungen hat man es allerdings oft mit so genannten **partiellen Differentialgleichungen** zu tun. Das sind Differentialgleichungen, bei denen die gesuchte Funktion  $y$  von mehr als einer Variable abhängt. Gesucht sind in diesem Fall Funktionen  $y = y(x_1, \dots, x_k)$ , die durch Beziehungen von partiellen Ableitungen beschrieben werden.

**Beispiel 5.1** Für die einführenden Beispiele gilt:

- (i)  $y'(x) = y(x)$ , d.h.  $f = f(x, y) = y$ , also handelt es sich um eine DGL 1. Ordnung
- (ii)  $(y'(x))^2 = y(x) - 1$ , d.h.  $f = f(x, y) = \pm\sqrt{y-1}$ , also handelt es sich ebenfalls um eine DGL 1. Ordnung

(iii) Eine DGL 2. Ordnung ist beispielsweise gegeben durch  $y''(x) = y'(x) - \frac{1}{4}y(x)$ , d.h.  $f = f(x, y, y') = y' - \frac{1}{4}y$ .

Die Lösung ergibt sich zu  $y(x) = ae^{\frac{x}{2}} + bxe^{\frac{x}{2}}$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ . Durch Einsetzen der Lösung kann diese getestet werden:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2}ae^{\frac{x}{2}} + be^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}bxe^{\frac{x}{2}} \\ y''(x) &= \frac{1}{4}ae^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}be^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}be^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}bxe^{\frac{x}{2}} \\ \Rightarrow y''(x) &= \frac{1}{2}ae^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}ae^{\frac{x}{2}} + be^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}bxe^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}bxe^{\frac{x}{2}} \\ &= y'(x) - \frac{1}{4}y''(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Frage: Das Testen von vorgeschlagenen Lösungen ist einfach, aber wie findet man Lösungen von DGLs?

→ Eine allgemeine Antwort darauf gibt es nicht. Über die **Klassifizierung** von (gewöhnlichen) DGLs lassen sich jedoch in vielen Fällen **maßgeschneiderte Lösungen** finden. Ein solches Vorgehen findet auch bei Gleichungen Anwendung, vgl. die Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

## 5.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

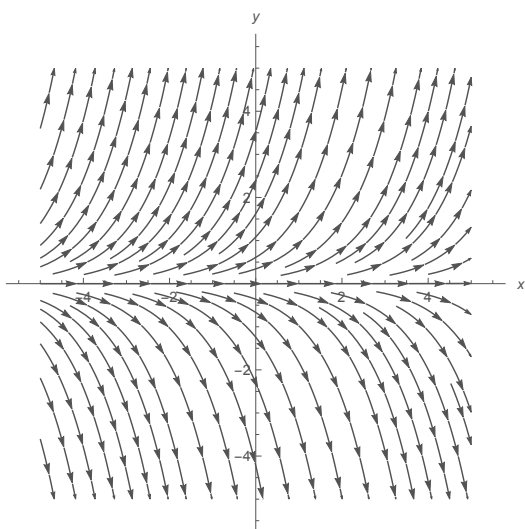
Differentialgleichungen 1. Ordnung sind solche, bei denen auf der linken Seite der Definition 5.1 nur eine erste Ableitung der Funktion  $y$  auftritt ( $n = 1$ ):

$$y' = f(x, y) \quad (*)$$

mit einer Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

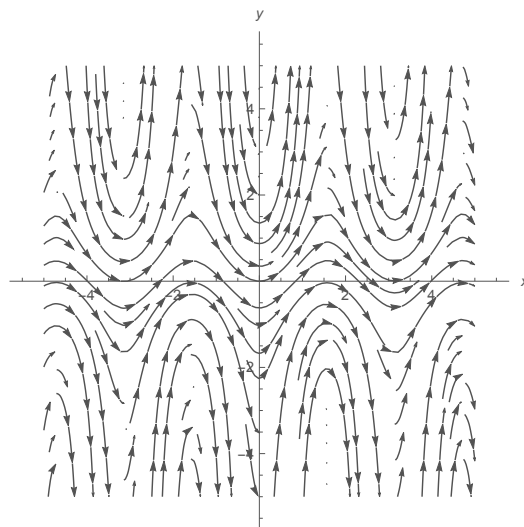
Für eine Lösung  $y$  der DGL gibt (\*) in jedem Punkt  $(x, y(x)) \in \mathbb{R}^2$  die Steigung der Tangente an den Graphen von  $y$  an.

Einen Überblick über die Lösungen von (\*) erhält man durch das sogenannte **Richtungsfeld** der DGL. Dazu zeichnet man in jedem Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  einen Pfeil mit Steigung  $f(x, y)$ . Die Lösungen der DGL (\*) verlaufen dann tangential zu den im Richtungsfeld gezeichneten Richtungen.



Richtungsfeld der DGL  $y' = y$   
mit allgemeiner Lösung ( $a \in \mathbb{R}$ )

$$y(x) = ae^x$$



Richtungsfeld der DGL  $y' = \sin(2x)(y^2 + 1)$   
mit allgemeiner Lösung ( $a \in \mathbb{R}$ )

$$y(x) = \tan\left(a - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)$$

### Spezialfall: Separable Differentialgleichungen

Eine spezielle Klasse von DGLs 1. Ordnung sind so genannte **separable Differentialgleichungen**. Dieser Typ liegt vor, falls sich die DGL in der Form

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

mit zwei Funktionen  $g$  und  $h$  schreiben lässt. Der erste Faktor ist dabei eine Funktion ausschließlich von  $x$ , der zweite Faktor eine Funktion ausschließlich von  $y$ . Das zugehörige Lösungsverfahren heißt **Trennung der Variablen**:

#### Lösungsverfahren (1. Schritt):

Für  $h(y) \neq 0$  kann man eine separable DGL umformen zu

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x)$$

Integration beider Seiten nach  $x$  ergibt zunächst

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))} dx = \int g(x) dx$$

und mit Hilfe von Substitution  $y = y(x)$ , d.h.  $dy = y'(x) dx$ , lässt sich die linke Seite als Integral nach  $y$  darstellen:

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

#### Lösungsverfahren (2. Schritt):

Durch Bestimmung von Stammfunktionen auf beiden Seiten der Gleichung und Auflösung nach  $y$  (wenn möglich) erhält man die Menge der nicht-konstanten Lösungen der DGL.

#### Lösungsverfahren (3. Schritt):

Jede Nullstelle von  $h$ , d.h. jedes  $y_0 \in \mathbb{R}$  mit  $h(y_0) = 0$ , liefert noch eine konstante Lösung der DGL:

$$y(x) = y_0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Die **allgemeine Lösung** der DGL ist die Menge aller nicht-konstanten Lösungen zusammen mit der Menge aller konstanten Lösungen.

### Beispiel 5.2

(i)  $y' = f(x, y) = y$  ist eine separable DGL. Es folgt:

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x) \\ \Leftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} &= 1 \quad \text{für } y \neq 0 \\ \Leftrightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx &= \int 1 dx \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy &= \int 1 dx \end{aligned}$$

Führt man die Integration aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \ln |y(x)| + c_1 &= x + c_2 \\ \Leftrightarrow \ln |y(x)| &= x + c_2 - c_1 = x + c \quad (\text{Differenz zweier Integrationskonstanten}) \\ \Leftrightarrow |y(x)| &= e^{x+c} = e^x \cdot \underbrace{e^c}_{=:b} = be^x \quad \text{für alle } b > 0 \\ \Leftrightarrow y(x) &= \pm be^x = ae^x \quad \text{für alle } a \neq 0 \end{aligned}$$

Als nicht-konstante Lösungen erhält man also  $y(x) = ae^x$  für alle  $a \neq 0$ .

Die konstanten Lösungen erhält man als Nullstellen des  $y$ -abhängigen Faktors:  $y = 0$ . Diese einzige konstante Lösung kann in die Darstellung der nicht-konstanten Lösungen für  $a = 0$  integriert werden. Insgesamt ergibt sich also die allgemeine Lösung der DGL zu:

$$y(x) = ae^x \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

- (ii) Betrachtet man das zweite einführende Beispiel dieses Kapitels,  $(y')^2 = y - 1$ , so lässt sich dies für  $y \geq 1$  umschreiben als:

$$y' = f(x, y) = \pm\sqrt{y-1}$$

Aus dieser separablen Darstellung folgt:

$$\begin{aligned} y' &= \pm\sqrt{y-1} \\ \Leftrightarrow \pm \frac{y'}{\sqrt{y-1}} &= 1 \quad \text{für } y \neq 1 \\ \Leftrightarrow \pm \int \frac{y'}{\sqrt{y-1}} dx &= \int 1 dx \\ \Leftrightarrow \pm \int \frac{1}{\sqrt{y-1}} dy &= \int 1 dx \end{aligned}$$

Führt man hier die Integration aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \pm 2\sqrt{y-1} + c_1 &= x + c_2 \\ \Leftrightarrow 4(y-1) &= (x + c_2 - c_1)^2 = (x+a)^2 \quad (\text{Differenz zweier Integrationskonstanten}) \\ \Leftrightarrow y(x) &= 1 + \frac{1}{4}(x+a)^2 \geq 1 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dies stellt die nicht-konstanten Lösungen dar.

Zusätzlich ist  $y = 1$  die konstante Lösung der DGL. In diesem Beispiel lässt sich die konstante Lösung nicht in die Darstellung der nicht-konstanten Lösungen integrieren.

- (iii)  $y' = f(x, y) = \sin(2x)(y^2 + 1)$

Für den  $y$ -abhängigen Faktor gilt  $y^2 + 1 \geq 1$ , d.h. es gibt nur nicht-konstante Lösungen. Die Trennung der Variablen führt auf folgende Integralgleichung:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \sin(2x) dx$$

Also ergibt sich mit einer beliebigen Konstante  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \arctan(y) - a &= -\frac{1}{2} \cos(2x) \\ \Leftrightarrow y(x) &= \tan\left(a - \frac{1}{2} \cos(2x)\right) \end{aligned}$$

- (iv)  $y' = f(x, y) = \sin(y)$

Hier treten Nullstellen bei  $y = y_k = k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  auf. Abseits dieser Nullstellen, also für  $y \neq y_k$ , ergibt die Trennung der Variablen:

$$\int \frac{dy}{\sin(y)} = \int 1 dx$$

Das Integral auf der rechten Seite ergibt  $x + c$  mit einer beliebigen Konstante  $c \in \mathbb{R}$ . Für die linke Seite ist ein etwas komplizierteres Integral zu bestimmen. Mittels Additionstheorem

$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$  für  $a = b = \frac{y}{2}$  sowie dem trigonometrischen Pythagoras im Zähler ergibt sich:

$$\frac{1}{\sin(y)} = \frac{1}{2 \sin(\frac{y}{2}) \cos(\frac{y}{2})} = \frac{\cos^2(\frac{y}{2}) + \sin^2(\frac{y}{2})}{2 \sin(\frac{y}{2}) \cos(\frac{y}{2})} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos(\frac{y}{2})}{\sin(\frac{y}{2})} + \frac{\sin(\frac{y}{2})}{\cos(\frac{y}{2})} \right)$$

Damit folgt für das Integral auf der linken Seite:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\sin(y)} &= \int \left( \frac{\frac{1}{2} \cos(\frac{y}{2})}{\sin(\frac{y}{2})} + \frac{\frac{1}{2} \sin(\frac{y}{2})}{\cos(\frac{y}{2})} \right) dy \\ &= \ln(\sin(\frac{y}{2})) - \ln(\cos(\frac{y}{2})) = \ln(\tan(\frac{y}{2})) \end{aligned}$$

Damit erhält man aus obiger Integralgleichung alle nicht-konstanten Lösungen:

$$\begin{aligned} \ln(\tan(\frac{y}{2})) &= x + c \\ \Leftrightarrow \tan(\frac{y}{2}) &= e^{x+c} = ae^x \quad \text{für alle } a > 0 \\ \Leftrightarrow y(x) &= 2 \arctan(ae^x) \end{aligned}$$

Zusätzlich gibt es die konstanten Lösungen  $y(x) = y_k = k\pi$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 5.2 Lineare Differentialgleichungen

**Definition 5.2** Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

mit Funktionen  $b$  und  $a_i$  für  $0 \leq i \leq n-1$  heißt **lineare Differentialgleichung der Ordnung  $n$**  ( $n$ -ter Ordnung).

Falls die sogenannte Störfunktion  $b(x) = 0$  konstant Null ist, dann heißt die lineare DGL **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Man nennt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

die zu obiger Differentialgleichung zugehörige **homogene DGL**.

Bemerkungen:

- Das Beispiel  $y'' = y' - \frac{1}{4}y$  ist eine homogene lineare DGL 2. Ordnung:

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$$

mit

$$a_1 = -1, \quad a_0 = \frac{1}{4}, \quad b(x) = 0$$

- Von den vorherigen Beispielen 5.2 gab es nur eine einzige lineare DGL (nämlich  $y' = y$  mit der Exponentialfunktion als Lösung), alle anderen DGLs waren nicht-linear.

**Satz 5.3** Die **Lösung**  $y$  einer inhomogenen linearen DGL  $n$ -ter Ordnung ist von der Form

$$y = y_s + y_h,$$

wobei  $y_s$  eine **spezielle Lösung** der inhomogenen DGL und  $y_h$  die **allgemeine Lösung** der zugehörigen homogenen DGL ist.

Die Menge der Lösungen einer homogenen linearen DGL  $n$ -ter Ordnung ist ein Vektorraum der Dimension  $n$ .

Es gibt also  $n$  linear unabhängige Basislösungen  $y_1, \dots, y_n$ , so dass die allgemeine Lösung  $y_h$  der homogenen linearen DGL folgende Form hat:

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) \quad (C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R})$$

Bemerkung: Der Formalismus bei linearen Gleichungen und linearen DGLs ist sehr ähnlich:

Lineare Gleichung

$$A\vec{x} = \vec{v} \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

mit Lösung  $\vec{x} = \vec{x}_s + \vec{x}_h$

(gemäß „Ingenieurmathematik 1“, Satz 3.31)

Homogene Lösung lässt sich in  $n$ -dimensionaler Basis darstellen:

$$\vec{x}_h = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k$$

Lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = b(x)$$

mit Lösung  $y = y_s + y_h$

(gemäß „Ingenieurmathematik 2“, Satz 5.3)

Homogene Lösung lässt sich in  $n$ -dimensionaler Basis darstellen:

$$y_h(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x)$$

**Satz 5.4** (Variation der Konstanten)

Die allgemeine Lösung  $y$  der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + a(x)y = b(x)$$

ist

$$y(x) = y_s(x) + y_h(x) = (C(x) + C)e^{-A(x)},$$

wobei

$A(x)$  eine Stammfunktion von  $a(x)$ ,

$C(x)$  eine Stammfunktion von  $b(x)e^{A(x)}$  und

$C \in \mathbb{R}$  eine Konstante ist.

Bemerkung: Die in dem Satz genannte allgemeine Lösung lässt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung testen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= C'(x)e^{-A(x)} - C(x)e^{-A(x)}A'(x) - Ce^{-A(x)}A'(x) \\ &= b(x)e^{A(x)}e^{-A(x)} - (C(x) + C)a(x)e^{-A(x)} \\ &= b(x) - a(x)(C(x) + C)e^{-A(x)} \\ &= b(x) - a(x)y(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$



**Beispiel 5.3**  $y' + \frac{2xy}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2}$  ist für  $x \neq 0$  eine lineare DGL 1. Ordnung.  
 Es ist  $a(x) = \frac{2x}{x^2+1}$  und  $b(x) = \frac{1}{x^2}$ , also

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1)$$

Ferner ist für eine spezielle Lösung eine Stammfunktion zu finden für

$$b(x)e^{A(x)} = \frac{1}{x^2}e^{\ln(x^2+1)} = \frac{1}{x^2}(x^2 + 1) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

Es folgt also

$$C(x) = \int b(x)e^{A(x)} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - \frac{1}{x}$$

Insgesamt ergibt sich für die Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= (C(x) + C)e^{-A(x)} = \left(x - \frac{1}{x} + C\right) \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2 + Cx - 1}{x^3 + x} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Spezialfall: Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Falls  $a(x) = a \in \mathbb{R}$  konstant ist, d.h. falls eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vorliegt,

$$y' + ay = b(x) ,$$

dann kann die spezielle Lösung  $y_s(x)$  durch einen **geeigneten Lösungsansatz** in Abhängigkeit von der Störfunktion  $b(x)$  ermittelt werden wie sie in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt sind:

**Spezieller Lösungsansatz für lineare DGLs 1. Ordnung**

Störfunktion $b(x)$	Lösungsansatz $y_s(x)$
$p_n(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$	$q_n(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n$
$p_n(x) \cdot e^{kx}$	$q_n(x) \cdot e^{kx}$ falls $k \neq -a$ $x \cdot q_n(x) \cdot e^{kx}$ falls $k = -a$
$p_n(x) \cdot \cos(\omega x)$ oder $p_n(x) \cdot \sin(\omega x)$	$q_n(x) \cdot \cos(\omega x) + r_n(x) \cdot \sin(\omega x)$
$p_n(x) \cdot \cos(\omega x) \cdot e^{kx}$ oder $p_n(x) \cdot \sin(\omega x) \cdot e^{kx}$	$(q_n(x) \cdot \cos(\omega x) + r_n(x) \cdot \sin(\omega x)) \cdot e^{kx}$

mit *gegebenen* Parametern  $b_0, b_1, \dots, b_n, k, \omega \in \mathbb{R}$  bzw. *gegebenem* Polynom  $p_n(x)$  vom Grad  $n$  und *zu bestimmenden* Parametern  $d_0, \dots, d_n \in \mathbb{R}$  bzw. *zu bestimmenden* Polynomen  $q_n(x), r_n(x)$  vom Grad  $n$

**Beispiel 5.4**  $y' - 2y = (x^2 + 1) \cos(x)$  ist eine lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Es ist  $a = -2$  und  $b(x) = p_2(x) \cos(x)$ , wobei  $p_2(x)$  ein Polynom zweiten Grades ist. Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$y(x) = y_s(x) + y_h(x)$$

und setzt sich aus einer speziellen Lösung  $y_s(x)$  und einer homogenen Lösung  $y_h(x)$  zusammen. Der Ansatz für die spezielle Lösung lautet gemäß obiger Tabelle  $q(x) \cos(x) + r(x) \sin(x)$ , wobei  $q(x)$  und  $r(x)$  zu bestimmende Polynome zweiten Grades sind. Ferner erhält man die homogene Lösung der DGL, d.h. für  $b(x) = 0$ , durch Trennung der Variablen.

#### Homogene Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 0 \\ \Leftrightarrow y' &= 2y \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{2y} dy &= \int 1 dx \quad \text{für } y \neq 0 \end{aligned}$$

Löst man die Integrale, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln |y| + \tilde{c} &= x \\ \Leftrightarrow |y| &= e^{2x-c} = e^{-c} e^{2x} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow y &= ae^{2x} \quad \text{mit } a \neq 0 \end{aligned}$$

Zusammen mit der konstanten Lösung  $y = 0$  lassen sich alle homogenen Lösungen darstellen als  $y_h(x) = ae^{2x}$  mit  $a \in \mathbb{R}$ .

#### Spezielle Lösung

Laut Tabelle ist für die spezielle Lösung  $y_s(x) = q(x) \cos(x) + r(x) \sin(x)$  anzusetzen mit

$$\begin{aligned} q(x) &= a_q x^2 + b_q x + c_q \\ r(x) &= a_r x^2 + b_r x + c_r \end{aligned}$$

Dies ist die allgemeine Form von zwei Polynomen zweiten Grades mit sechs Koeffizienten ( $a_q, b_q, c_q$  und  $a_r, b_r, c_r$ ), die im Folgenden zu bestimmen sind. Dies erreicht man, indem der Ansatz in die DGL eingesetzt wird, woraus Bedingungen an die Koeffizienten abgeleitet werden können. Es gilt mit der Produktregel:

$$\begin{aligned} y'_s(x) &= q'(x) \cos(x) - q(x) \sin(x) + r'(x) \sin(x) + r(x) \cos(x) \\ &= (2a_q x + b_q) \cos(x) - (a_q x^2 + b_q x + c_q) \sin(x) \\ &\quad + (2a_r x + b_r) \sin(x) + (a_r x^2 + b_r x + c_r) \cos(x) \\ &= [a_r x^2 + (2a_q + b_r)x + (b_q + c_r)] \cos(x) \\ &\quad + [-a_q x^2 + (-b_q + 2a_r)x + (-c_q + b_r)] \sin(x) \\ &\stackrel{!}{=} b(x) + 2y_s = (x^2 + 1) \cos(x) + 2y_s \end{aligned}$$

In der Rechnung wurden ausschließlich die allgemeinen Ansätze für  $q(x)$  und  $r(x)$  genutzt und nach gemeinsamen sin- bzw. cos-Faktoren gruppiert. In der letzten Zeile fordert man, dass die

DGL  $y' - 2y = (x^2 + 1) \cos(x)$  für die spezielle Lösung  $y_s$  erfüllt ist. Für dieser Forderung lässt sich erneut der Ansatz für  $y_s$  verwenden:

$$\begin{aligned} & (x^2 + 1) \cos(x) + 2y_s(x) \\ &= (x^2 + 1) \cos(x) + 2(q(x) \cos(x) + r(x) \sin(x)) \\ &= (x^2 + 1) \cos(x) + 2(a_q x^2 + b_q x + c_q) \cos(x) + 2(a_r x^2 + b_r x + c_r) \sin(x) \\ &= [(1 + 2a_q)x^2 + 2b_q x + (1 + 2c_q)] \cos(x) \\ &\quad + [2a_r x^2 + 2b_r x + 2c_r] \sin(x) \end{aligned}$$

Dabei wurden die Terme wieder nach gemeinsamen sin- bzw. cos-Faktoren gruppiert. Die Forderung, dass  $y_s$  die DGL erfüllt, führt auf insgesamt sechs Bedingungen an die unbekannt Koeffizienten. Zunächst für die cos-Strukturen:

$$\begin{aligned} a_r &= 1 + 2a_q \\ 2a_q + b_r &= 2b_q \\ b_q + c_r &= 1 + 2c_q \end{aligned}$$

Ferner erhält man aus den sin-Strukturen:

$$\begin{aligned} -a_q &= 2a_r \\ -b_q + 2a_r &= 2b_r \\ -c_q + b_r &= 2c_r \end{aligned}$$

Es ergibt sich für die sechs unbekannt Koeffizienten ein lineares Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  mit

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (a_q, b_q, c_q, a_r, b_r, c_r)^\top \\ \vec{b} &= (1, 0, 1, 0, 0, 0)^\top \\ A &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mittels Gauß-Algorithmus ist die Inverse  $A^{-1}$  zu bestimmen, sodass  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$  berechnet werden kann. Es ergibt sich:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \left( -\frac{2}{5}, -\frac{6}{25}, \frac{54}{125}, \frac{1}{5}, \frac{8}{25}, \frac{47}{125} \right)^\top$$

Für die spezielle Lösung, die mit dem Ansatz  $y_s(x) = q(x) \cos(x) + r(x) \sin(x)$  gefunden wurde, ergibt sich also:

$$y_s(x) = \left( -\frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{25}x + \frac{54}{125} \right) \cos(x) + \left( \frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{25}x + \frac{47}{125} \right) \sin(x)$$

### Allgemeine Lösung

Fasst man die homogene und spezielle Lösung zusammen, so lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = y_s(x) + y_h(x) = \left( -\frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{25}x + \frac{54}{125} \right) \cos(x) + \left( \frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{25}x + \frac{47}{125} \right) \sin(x) + ae^{2x}$$

mit einem freien Parameter  $a \in \mathbb{R}$ . Dieser lässt sich im Rahmen eines Anfangwertproblems (AWP) oder Randwertproblems (RWP) festlegen.

### Spezialfall: Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Als lineare Differentialgleichung 2. Ordnung erhält man allgemein:<sup>10</sup>

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

Im Folgenden werden statt allgemeiner Funktionen **nur konstante Koeffizienten** zugelassen sein:  $a_1(x) = a_1 \in \mathbb{R}$  und  $a_0(x) = a_0 \in \mathbb{R}$ .

Die Lösung  $y$  einer linearen DGL 2. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

$$y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$$

mit  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$  und einer Funktion  $b(x)$  ist gegeben als

$$y(x) = y_s(x) + y_h(x),$$

wobei  $y_s(x)$  eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL und  $y_h(x)$  die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist.

### Homogene Lsg. einer linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die homogene Lösung  $y_h(x)$  der zugehörigen homogenen DGL erhält man mithilfe der Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2$  des **charakteristischen Polynoms**

$$\chi(\lambda) := \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden ( $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ):

Fall 1: Unterschiedliche reelle Nullstellen, d.h.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ :

$$y_h(x) = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x}$$

Fall 2: Gleiche reelle Nullstellen, d.h.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_1 = \lambda_2$ :

$$y_h(x) = C_1e^{\lambda_1x} + C_2xe^{\lambda_1x}$$

Fall 3: Zwei verschiedene komplexe Nullstellen, d.h.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  mit  $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = a - ib$  mit  $b \neq 0$ :

$$y_h(x) = C_1e^{ax} \cos(bx) + C_2e^{ax} \sin(bx)$$

### Spezielle Lsg. einer linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wie auch bei den linearen DGLs 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lässt sich die spezielle Lösung über einen Ansatz entsprechend nachstehender Tabelle finden. Neben der Struktur der Störfunktion  $b(x)$  sind im Falle von linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten auch die Nullstellen  $\lambda_i$  des charakteristischen Polynoms  $\chi(\lambda)$  beim Aufstellen des Ansatzes zu berücksichtigen:

---

<sup>10</sup>Es gibt berühmte Beispiele für diesen Typ von DGLs: Hermitesche DGL, Laguerresche DGL, Legendresche DGL. Mit diesen DGLs ist jeweils eine Klasse von Polynomen assoziiert, die z.B. in der Quantenmechanik Anwendung finden, aber nicht Teil dieser Vorlesung sind.

### Spezieller Lösungsansatz für lineare DGLs 2. Ordnung

Störfunktion $b(x)$	Lösungsansatz $y_s(x)$
$p_n(x)$	falls 0 keine Nullstelle von $\chi(\lambda) : q_n(x)$ falls 0 einfache Nullstelle von $\chi(\lambda) : x \cdot q_n(x)$ falls 0 doppelte Nullstelle von $\chi(\lambda) : x^2 \cdot q_n(x)$
$p_n(x) \cdot e^{kx}$	falls $k$ keine Nullstelle von $\chi(\lambda) : q_n(x) \cdot e^{kx}$ falls $k$ einfache Nullstelle von $\chi(\lambda) : x \cdot q_n(x) \cdot e^{kx}$ falls $k$ doppelte Nullstelle von $\chi(\lambda) : x^2 \cdot q_n(x) \cdot e^{kx}$
$p_n(x) \cdot \cos(\omega x)$ oder $p_n(x) \cdot \sin(\omega x)$	falls $i\omega$ keine Nullstelle von $\chi(\lambda) :$ $q_n(x) \cdot \cos(\omega x) + r_n(x) \cdot \sin(\omega x)$  falls $i\omega$ Nullstelle von $\chi(\lambda) :$ $x \cdot (q_n(x) \cdot \cos(\omega x) + r_n(x) \cdot \sin(\omega x))$
$p_n(x) \cdot \cos(\omega x) \cdot e^{kx}$ oder $p_n(x) \cdot \sin(\omega x) \cdot e^{kx}$	falls $k + i\omega$ keine Nullstelle von $\chi(\lambda) :$ $(q_n(x) \cdot \cos(\omega x) + r_n(x) \cdot \sin(\omega x)) \cdot e^{kx}$  falls $k + i\omega$ Nullstelle von $\chi(\lambda) :$ $x \cdot (q_n(x) \cdot \cos(\omega x) + r_n(x) \cdot \sin(\omega x)) \cdot e^{kx}$

mit gegebenem Polynom  $p_n(x)$  vom Grad  $n$  bzw. gegebenen Parametern  $k, \omega \in \mathbb{R}$  und zu bestimmenden Polynomen  $q_n(x), r_n(x)$  vom Grad  $n$ .  $\chi(\lambda)$  ist das charakteristische Polynom der DGL.

Zusammenfassung: Überblick der vier Methoden zur Lösung von DGLs

#### Abschnitt 5.1: DGL 1. Ordnung

- Allgemein: Richtungsfeld zur Visualisierung
- Spezialfall 1: Separable DGL 1. Ordnung  $\Rightarrow$  **Trennung der Variablen**

#### Abschnitt 5.2: Lineare DGL

- Allgemein: Strukturaussage  $y(x) = y_h(x) + y_s(x)$  (Satz 5.3)
- Spezialfall 2: Lineare DGL 1. Ordnung  $\Rightarrow$  **Variation der Konstanten** (Satz 5.4)
- Spezialfall 3: Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y_h \Rightarrow$  **Trennung der Variablen**

$y_s \Rightarrow$  **Ansatz nach Störfunktion** (siehe Tabelle)

- Spezialfall 4: Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y_h \Rightarrow$  **Charakteristisches Polynom**  $\chi(\lambda)$  und dessen Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2$

$y_s \Rightarrow$  **Ansatz nach Störfunktion und Nullstellen**  $\lambda_1, \lambda_2$  (siehe Tabelle)

### Anwendungsbeispiel: Die Schwingungsdifferentialgleichung

Abschließend zum Kapitel 5 steht die Schwingungsdifferentialgleichung im Fokus der Diskussion. Sie ist eine in der Physik äußerst prominente gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung und kann zur Beschreibung vieler Systeme genutzt werden. Sie enthält einen Parameter zur Dämpfung,  $\delta \geq 0$  sowie einen zweiten Parameter  $\omega_0 > 0$ , der die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung darstellt:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = b(t)$$

Zu bestimmen ist die zeitabhängige Funktion  $y(t)$ . Dabei bezeichnet  $\dot{y}$  bzw.  $\ddot{y}$  die erste bzw. zweite Ableitung nach der Zeit. Die Störfunktion  $b(t)$  wird manchmal als externer Antrieb der Schwingung bezeichnet.

#### Teil 1: Freie gedämpfte Schwingung

Die freie gedämpfte Schwingung ist die oben beschriebene Schwingung ohne externen Antrieb, d.h. es ist  $b(t) = 0$ . Ihr charakteristisches Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Abhängig von den Parametern  $\delta \geq 0$  und  $\omega_0 > 0$  sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

- Fall 1.1:  $\delta > \omega_0$ , d.h. zwei (unterschiedliche) reelle Nullstellen
- Fall 1.2:  $\delta = \omega_0$ , d.h. eine doppelte reelle Nullstelle
- Fall 1.3:  $\delta < \omega_0$ , d.h. zwei (unterschiedliche) komplexe Nullstellen

#### Fall 1.1: Starke Dämpfung

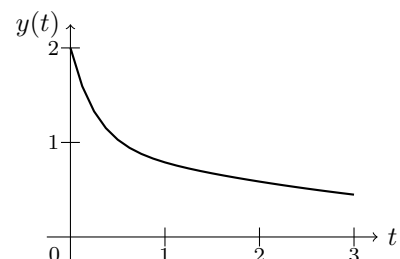
Für die Konstellation  $\delta > \omega_0$  spricht man von einer starken Dämpfung. Man erhält zwei unterschiedliche reelle Nullstellen des charakteristischen Polynoms,  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$ . Die Lösung der DGL lautet in diesem Fall:

$$y(t) = C_1 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

mit zwei unbekanntenen Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , die durch ein AWP oder RWP bestimmt werden.

Der typische zeitliche Verlauf dieser Lösung spiegelt die starke Dämpfung in Form einer monoton abfallenden Funktion wider. Dies ergibt sich aus den negativen Vorfaktoren in den beiden Exponenten.

(In der Skizze ist  $C_1 = C_2 = 1$  und  $\delta = 2, \omega_0 = 1$ .)



#### Fall 1.2: Aperiodischer Grenzfall

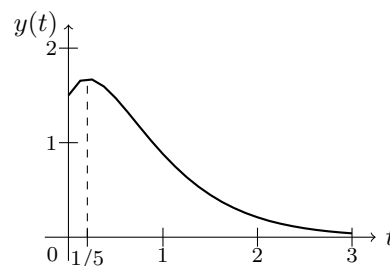
Ist die Dämpfung gerade die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung,  $\delta = \omega_0$ , so erhält man eine doppelte Nullstelle  $\lambda_{1,2} = -\delta = -\omega_0 < 0$ . Die Lösung der DGL lautet in diesem Fall:

$$y(t) = C_1 e^{-\omega_0 t} + C_2 t e^{-\omega_0 t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_0 t}$$

mit zwei unbekanntenen Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , die durch ein AWP oder RWP bestimmt werden.

Der typische zeitliche Verlauf dieser Lösung ist durch die Ausprägung eines Maximums gekennzeichnet. Das Maximum wird zur Zeit  $t_{\max} = \frac{1}{\omega_0} - \frac{C_1}{C_2}$  erreicht, was für  $\omega_0 < \frac{C_2}{C_1}$  positiv ist.

(In der Skizze ist  $C_1 = \frac{3}{2}$ ,  $C_2 = 5$  und  $\delta = \omega_0 = 2$ .)



### Fall 1.3: Schwache Dämpfung

Im Falle einer schwachen Dämpfung, d.h.  $0 \leq \delta < \omega_0$  erhält man zwei unterschiedliche komplexe Nullstellen:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}_{=: \omega_\delta > 0}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_\delta$$

Die Lösung der DGL lautet also in diesem Fall:

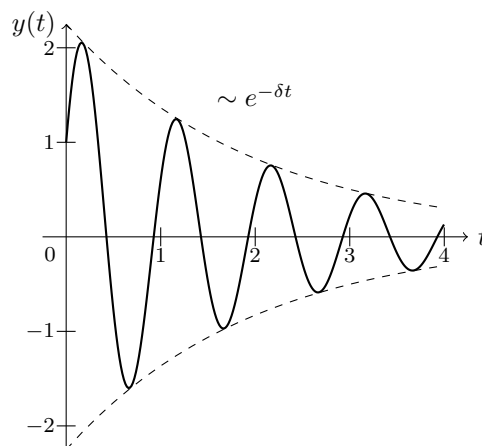
$$y(t) = e^{-\delta t} (C_1 \cos(\omega_\delta t) + C_2 \sin(\omega_\delta t))$$

mit zwei unbekanntenen Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , die durch ein AWP oder RWP bestimmt werden.

Diese Lösung stellt eine Schwingung mit reduzierter Frequenz  $0 < \omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$  dar, deren Amplitude aufgrund des Vorfaktors  $e^{-\delta t}$  exponentiell gedämpft ist.

Im Grenzfall einer verschwindenden Dämpfung,  $\delta \rightarrow 0$ , erhält man eine harmonische Schwingung, deren Frequenz die Eigenfrequenz ist:  $\omega_\delta \rightarrow \omega_0$ .

(In der Skizze ist  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$  und  $\delta = \frac{1}{2}$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ .)



### Teil 2: Harmonisch angeregte gedämpfte Schwingung

Für den zweiten Teil der Diskussion betrachte man eine Störfunktion  $b(t)$  in Form einer harmonischen Schwingung  $b(t) = b \sin(\omega t)$ :

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = b \sin(\omega t)$$

Dabei ist  $b > 0$  die Amplitude und  $\omega$  die äußere Antriebsfrequenz, die von der Eigenfrequenz  $\omega_0$  als zusätzlicher Parameter zu unterscheiden ist.

### Fall 2.1: Theoretischer Fall einer verschwindenden Dämpfung

Alle realen Systeme besitzen eine Form von Dämpfung, die z.B. durch Reibung verursacht wird. Mathematisch kann der idealisierte Fall eines harmonisch angeregten Systems mit verschwindender Dämpfung betrachtet werden. Die zugehörige Schwingungsdifferentialgleichung lautet

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = b \sin(\omega t)$$

Die zugehörige homogene Lösung ist aus der Diskussion des Falls 1.3 bereits bekannt:

$$y_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

mit den beiden Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Neu zu diskutieren ist die spezielle Lösung, für die sich aufgrund der Inhomogenität ein Ansatz ergibt, der von den Nullstellen des charakteristischen Polynoms abhängt. Es ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$$

woraus sich die folgenden Nullstellen ergeben:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \stackrel{?}{=} i\omega$$

Abhängig davon, ob  $i\omega$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $\chi(\lambda)$  ist, ergibt sich ein anderer Ansatz für die spezielle Lösung:

$$y_s(t) = \begin{cases} q \cos(\omega t) + r \sin(\omega t) & \text{falls } \omega \neq \omega_0 \\ qt \cos(\omega t) + rt \sin(\omega t) & \text{falls } \omega = \omega_0 \end{cases}$$

Die Ansätze ergeben sich aus der Störfunktion  $b(t) = b \sin(t)$ , wobei  $b > 0$  eine Konstante, d.h. ein Polynom nullter Ordnung ist. Entsprechend sind entsprechende Polynome nullter Ordnung anzusetzen, d.h. Konstanten  $q, r \in \mathbb{R}$ . Um die Differentialgleichung zu erfüllen, ist die zweite Ableitung des Ansatzes zu bestimmen:

$$\ddot{y}_s(t) = \begin{cases} -q\omega^2 \cos(\omega t) - r\omega^2 \sin(\omega t) & \text{falls } \omega \neq \omega_0 \\ \omega [(2r - qt\omega) \cos(\omega t) - (2q + rt\omega) \sin(\omega t)] & \text{falls } \omega = \omega_0 \end{cases}$$

Für jeden der beiden Fälle für  $y_s(t)$  sind die Konstanten  $q, r \in \mathbb{R}$  separat zu bestimmen, also unterscheidet man:

- $\omega \neq \omega_0$ : Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt in diesem Fall:

$$((-q\omega^2 \cos(\omega t) - r\omega^2 \sin(\omega t)) + (\omega_0^2 q \cos(\omega t) + \omega_0^2 r \sin(\omega t))) \stackrel{!}{=} b \sin(\omega t)$$

Vergleicht man hier die Vorfaktoren der Kosinus-Terme und der Sinus-Terme, so erhält man wieder zwei Bedingungen:

$$\begin{aligned} \text{I) } -q\omega^2 + \omega_0^2 q &= q(\omega_0^2 - \omega^2) \stackrel{!}{=} 0 & \Leftrightarrow & \quad q = 0 \\ \text{II) } -r\omega^2 + \omega_0^2 r &= r(\omega_0^2 - \omega^2) \stackrel{!}{=} b & \Leftrightarrow & \quad r = \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Der Nenner von  $r$  darf aufgrund der Voraussetzung  $0 < \omega \neq \omega_0$  stets gebildet werden.

- $\omega = \omega_0$ : Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt in diesem sogenannten Resonanzfall:

$$\omega [(2r - qt\omega) \cos(\omega t) - (2q + rt\omega) \sin(\omega t)] + \omega_0^2 qt \cos(\omega t) + \omega_0^2 rt \sin(\omega t) \stackrel{!}{=} b \sin(\omega t)$$

Vergleicht man hier die Vorfaktoren der Kosinus-Terme und der Sinus-Terme, so erhält man wieder zwei Bedingungen:

$$\begin{aligned} \text{I) } \omega(2r - qt\omega) + \omega_0^2 qt &= 2r\omega_0 \stackrel{!}{=} 0 & \Leftrightarrow & \quad r = 0 \\ \text{II) } \omega(-2q - rt\omega) + \omega_0^2 rt &= -2q\omega \stackrel{!}{=} b & \Leftrightarrow & \quad q = -\frac{b}{2\omega} \end{aligned}$$

In der Rechnung wurde explizit die Bedingung  $\omega = \omega_0$  genutzt.



Es ergibt sich also für die spezielle Lösung:

$$\ddot{y}_s(t) = \begin{cases} \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) & \text{falls } \omega \neq \omega_0 \\ -\frac{bt}{2\omega} \cos(\omega t) & \text{falls } \omega = \omega_0 \end{cases}$$

### Fall 2.2: Realistischer Fall mit endlicher Dämpfung

Es verbleibt der Fall einer endlichen Dämpfung  $\delta > 0$  zu diskutieren. Die zu lösende DGL lautet

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = b \sin(\omega t)$$

Die homogene Lösung ist wieder aus der vorangegangenen Diskussion im Fall 1 bekannt. Für die spezielle Lösung ist das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2$$

zu betrachten, das folgende Nullstellen besitzt:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Für den betrachteten Fall einer endlichen Dämpfung  $\delta > 0$  gilt stets  $\lambda_{1,2} \neq i\omega$ , was sich aufgrund der unterschiedlichen Realteile ergibt:

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} \neq 0 \quad \text{aber} \quad \operatorname{Re} i\omega = 0$$

Daraus ergibt sich der folgende Ansatz für die spezielle Lösung:

$$y_s(t) = q \cos(\omega t) + r \sin(\omega t)$$

wobei  $q, r \in \mathbb{R}$  zu bestimmende Parameter sind. Für die DGL sind die erste und zweite Ableitung des Ansatzes zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \dot{y}_s(t) &= -q\omega \sin(\omega t) + r\omega \cos(\omega t) \\ \ddot{y}_s(t) &= -q\omega^2 \cos(\omega t) - r\omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Damit die DGL erfüllt ist, muss also gelten:

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_s(t) + 2\delta\dot{y}_s(t) + \omega_0^2 y_s(t) \stackrel{!}{=} b \sin(\omega t) \\ \Leftrightarrow &-q\omega^2 \cos(\omega t) - r\omega^2 \sin(\omega t) + 2\delta q\omega \sin(\omega t) + 2\delta r\omega \cos(\omega t) + \omega_0^2 q \cos(\omega t) + \omega_0^2 r \sin(\omega t) \\ &= [-q\omega^2 + 2\delta r\omega + \omega_0^2 q] \cos(\omega t) \\ &+ [-r\omega^2 - 2\delta q\omega + \omega_0^2 r] \sin(\omega t) \stackrel{!}{=} b \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Vergleicht man auch hier die Vorfaktoren der Kosinus-Terme und der Sinus-Terme, so erhält man wieder zwei Bedingungen:

$$\text{I) } (\omega_0^2 - \omega^2)q + 2\delta r\omega \stackrel{!}{=} 0$$

$$\text{II) } -2\delta\omega q + (\omega_0^2 - \omega^2)r \stackrel{!}{=} b$$

Dies lässt sich als Matrixgleichung schreiben

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & 2\delta\omega \\ -2\delta\omega & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

und lösen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & 2\delta\omega \\ -2\delta\omega & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -2\delta\omega \\ 2\delta\omega & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \\ &= \frac{b}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \begin{pmatrix} -2\delta\omega \\ \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die spezielle Lösung folgt somit:

$$y_s(t) = \frac{-2b\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{b(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \sin(\omega t)$$

### Zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse

- (i) Für alle Dämpfungen  $\delta > 0$  lässt sich die Lösung der homogenen DGL, d.h. für  $b(t) = 0$ , in allen drei Fällen des ersten Teils der Diskussion schreiben als

$$y_h(t) = e^{-\delta t} \cdot F(t; \delta, \omega)$$

Die Schreibweise verdeutlicht, dass die Struktur der homogenen Lösung einen exponentiellen Vorfaktor gefolgt von einer Funktion  $F(t)$ , die zudem von den beiden Parameters  $\delta$  und  $\omega_0$  abhängt, beinhaltet.  $F$  ist spezifisch für jeden der drei Fälle, jedoch gilt stets

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} F(t; \delta, \omega_0) = 0$$

Betrachtet man nun für die inhomogene Differentialgleichung, d.h.  $b(t) \neq 0$ , so ergibt sich für die allgemeine Lösung

$$y(t) = y_s(t) + y_h(t)$$

im Grenzwert großer Zeiten:

$$y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_s(t)$$

Dies bedeutet, dass langfristig die allgemeine Lösung durch die spezielle Lösung dominiert wird. Nach einer charakteristischen Zeit („Einschwingzeit“) ist der antreibende Störterm maßgebend für die Lösung der DGL.

- (ii) Betrachtet man die spezielle Lösung für den idealisierten Fall einer verschwindenden Dämpfung (Fall 2.1 mit  $\delta = 0$ ) so ist zu erkennen, warum der Fall,  $\omega = \omega_0$ , als Resonanzfall bezeichnet wird: Die Amplitude  $A(t)$  wächst linear in der Zeit:

$$y_s(t) = -\frac{bt}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t) = \frac{bt}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t + \pi) = A(t) \cos(\omega_0 t + \pi)$$

Hierbei wurde das globale Minuszeichen als Phase  $\pi$  in das Argument des Kosinus gezogen. Die Anregung in diesem idealisierten Fall führt also zu einem System, das mit einer über alle Schranken wachsenden Amplitude schwingt und damit zu einer Zerstörung des Systems führt, was als Resonanzkatastrophe bezeichnet wird:  $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \infty$ .

- (iii) Betrachtet man die spezielle Lösung des realistischen Falls mit endlicher Dämpfung (Fall 2.2), so lässt sich eine Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen erkennen. Diese lässt sich

mit geeigneter Amplitude und Phasenverschiebung durch eine einzelne harmonische Schwingung darstellen:

$$y_s(t) = \frac{-2b\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{b(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \sin(\omega t)$$

$$\stackrel{!}{=} A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

wobei man für die Amplitude  $A$  und Phasenverschiebung  $\varphi$  findet:<sup>11</sup>

$$A = \frac{b}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\varphi = 2\pi - \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}\right)$$

Folgt man der Fallunterscheidung, so findet man:

- Für den Spezialfall  $\omega = \omega_0$  ergibt sich im realistischen Fall aus  $y_s(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ :

$$y_s(t) = \frac{b}{2\delta\omega} \sin(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = \frac{b}{2\delta\omega} \cos(\omega t + \pi) - \frac{b}{2\delta\omega} \cos(\omega t) \quad \checkmark$$

Man sieht, dass die Amplitude  $A$  invers proportional zur Dämpfung  $\delta > 0$  sowie zur externen Antriebsfrequenz  $\omega > 0$  ist.

- Für alle anderen Fälle  $\omega \neq \omega_0$  betrachte man die Amplitude  $A = A(\omega)$  der speziellen Lösung des realistischen Falls. Da  $\delta > 0$  gilt, gibt es keine divergente Amplitude wie sie im idealisierten Fall 2.1 mit  $\delta = 0$  aufgetreten ist:

$$A = A(\omega) = \frac{b}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

Die Frequenz, bei der die Amplitude  $A(\omega)$  ihr Maximum erreicht wird als Resonanzfrequenz  $\omega_R$  bezeichnet. Mittels Differentialrechnung findet man:

$$A(\omega) \leq \frac{b}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \text{ ist maximal} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \omega_R := \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Vergleicht man die Resonanzfrequenz mit der reduzierten Frequenz  $\omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , die im Fall 1.3 aufgetreten ist, so findet man unter der Voraussetzung  $\omega_R \in \mathbb{R}$ :

$$0 < \omega_R < \omega_\delta < \omega_0 \quad (\text{falls } \omega_R \in \mathbb{R})$$

Die Resonanzfrequenz  $\omega_R$  ist also stets kleiner als  $\omega_\delta$ , welche wiederum stets kleiner als die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung  $\omega_0$  ist. Es ist dabei zu beachten, dass  $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$  womöglich rein imaginär ist, was für  $\omega_\delta \in \mathbb{R}$  aufgrund der fallbezogenen Restriktion  $0 \leq \delta < \omega_0$  nicht auftreten kann.

---

<sup>11</sup>Vergleiche hierzu das Projekt 2 der Vorlesung „Ingenieurmathematik 1“.

## A Projekte

Projekte dienen der **Wiederholung** und **Anwendung** der spezifischen Kapitelinhalte. Eine eigenständige Bearbeitung sei vor der Durchsicht der Lösungsvorschläge empfohlen.

### A.1 Projekt 1 - Stochastische Anwendungen der Integralrechnung

In diesem Projekt zum Kapitel 1 „Anwendung der Integralrechnung einer Veränderlichen“ werden insbesondere Beispiele aus der Stochastik vorgestellt und notwendige Begriffe dafür kurz eingeführt.

**Einführung eines neuen Begriffs:** Es gibt reelle Funktionen  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Integral über die gesamte Definitionsmenge  $D$  genau  $1 = 100\%$  ist. Eine Funktion  $f(x) \geq 0$  mit  $\int_D f(x) dx = 1$  heißt **Dichtefunktion** und wird vor allem in der Stochastik verwendet, die sich mit der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt.

**Aufgabe 1** Überprüfen Sie, dass die drei nachstehenden Funktionen (mit ihren individuellen Definitionsbereichen  $D$ ) Dichtefunktionen sind:

- (a)  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $f(x) = 3x^2$
- (b)  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  für einen Parameter  $\lambda > 0$
- (c)  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = n \cdot \frac{a^n}{x^{n+1}}$  für zwei Parameter  $n, a > 0$

**Noch ein neuer Begriff:** Unter einer **Zufallsvariable** (ZV)  $X \in \mathbb{R}$  kann man sich eine Zahl vorstellen, die nicht berechnet werden kann, sondern die man „messen“ muss und daher mit einer Unsicherheit verbunden ist. Zum Beispiel kann die Wartezeit an der Kasse eines Supermarktes eine Zufallsvariable  $X \geq 0$  definieren. Weitere Möglichkeiten für Zufallsvariablen sind die Körpergröße eines Menschen, die Anzahl von PKW auf einem Parkplatz zu einer bestimmten Uhrzeit oder die individuelle Zahl von vollständig gelösten Übungsaufgaben innerhalb eines Semesters.

An dieser Stelle steht nicht die mathematische Modellierung von Zufallsvariablen im Fokus, sondern das Zusammenspiel mit einer womöglich vorliegenden Dichtefunktion. Liegt eine solche Dichtefunktion  $f$  für die Zufallsvariablen  $X$  vor, so nennt man für  $k \in \mathbb{N}_0$  das Integral

$$M_k := \int_D x^k f(x) dx$$

das  **$k$ -te Moment** der Zufallsvariable. Einige dieser Momente kennen Sie vielleicht:

- Das erste Moment  $M_1$  einer Zufallsvariable heißt **Erwartungswert**:  $E[X] := M_1$
- Als **Varianz** bezeichnet man die Kombination  $\text{Var}(X) := M_2 - M_1^2$  von Momenten.

---

<sup>1</sup>Die Schreibweise  $\int_D$  bezeichnet dabei die Integration über den gesamten Definitionsbereich. Beispielsweise ist für  $D = [a, b]$  die Integration  $\int_D = \int_a^b$  gemeint, für  $D = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$  gilt  $\int_D = \int_{-\infty}^{-1}(\cdot) + \int_1^{\infty}(\cdot)$ .

**Aufgabe 2** Gegeben Sei eine Zufallsvariable  $X$  mit Dichte  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  mit Definitionsbereich  $D = [0, \infty)$  und Parameter  $\lambda > 0$  zugrunde liegt.

- (a) Berechnen Sie den zunächst den Erwartungswert sowie anschließend die Varianz einer Zufallsvariable  $X$ .

Überlegen Sie auf Basis des Ergebnisses für  $M_1$ , wie der Parameter  $\lambda$  interpretiert werden kann. Als Kontext könnte für die ZV  $X$  z.B. die Wartezeit an der Kasse darstellen.

- (b) Spüren Sie in Ihrer Rechnung in Teilaufgabe a) die nachstehende Identität auf:

$$M_2 = \frac{2}{\lambda} \cdot M_1$$

Zeigen Sie auch, dass für das dritte Moment  $M_3 = \frac{3}{\lambda} \cdot M_2$  gilt und bestimmen Sie anschließend eine **allgemeine Rekursion**, indem Sie einen Vorfaktor  $C$  finden, sodass

$$M_k = C \cdot M_{k-1}$$

gilt. Nutzen Sie abschließend dieses Ergebnis, um einen **expliziten Ausdruck** für das  $k$ -te Moment  $M_k$  der obigen Dichtefunktion  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  anzugeben.

**Aufgabe 3** Erweiterung des Werkzeugkastens - Vorbereitung der Fourier-Analyse

- (a) Zeigen Sie zunächst, dass für  $a > 0$  und Parameter  $k, l \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\int_{-a}^a \cos(kx) \sin(lx) dx = 0$$

*Hinweis: Diese Identität kann ohne explizite Rechnung nachgewiesen werden.*

- (b) Zeigen Sie ferner für Parameter  $k, l \in \mathbb{R}$  mit  $|k| \neq |l|$  die nachstehenden Identitäten:

$$I_{cc}(x; k, l) := \int \cos(kx) \cos(lx) dx = \frac{k \sin(kx) \cos(lx) - l \cos(kx) \sin(lx)}{k^2 - l^2} + c$$

$$I_{ss}(x; k, l) := \int \sin(kx) \sin(lx) dx = \frac{l \sin(kx) \cos(lx) - k \cos(kx) \sin(lx)}{k^2 - l^2} + c$$

*Hinweis: Nutzen Sie die folgenden trigonometrischen Formeln:*

$$(*) \quad \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$(**) \quad \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$(***) \quad \sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

- (c) Weisen Sie abschließend für  $k, l \in \mathbb{N}$  die nachstehenden Identitäten nach:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \begin{cases} 0, & \text{für } k \neq l \\ 1, & \text{für } k = l \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = \begin{cases} 0, & \text{für } k \neq l \\ 1, & \text{für } k = l \end{cases}$$

Im Folgenden wird ein **Lösungsvorschlag** für das Projekt vorgestellt

**Aufgabe 1** Eine Dichtefunktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  muss zwei Eigenschaften besitzen:

- Nicht-Negativität:  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in D$
- Normierung:  $\int_D f(x) dx = 1$

(a)  $f(x) = 3x^2$  mit  $D = [0, 1]$  ist eine Dichtefunktion, da gilt:

- $f(x) \geq 0$  ✓
- $\int_D f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1$  ✓

(b)  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  mit  $\lambda > 0$  und  $D = [0, \infty)$  ist eine Dichtefunktion, da gilt:

- $f(x) \geq 0$  ✓
- $\int_D f(x) dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} (-e^{-\lambda x}) - (-1) = 1$  ✓

(c)  $f(x) = n \cdot \frac{a^n}{x^{n+1}}$  mit  $n, a > 0$  und  $D = [a, \infty)$  ist ebenfalls eine Dichtefunktion, da gilt:

- $f(x) \geq 0$  ✓
- $\int_D f(x) dx = \int_a^\infty n \frac{a^n}{x^{n+1}} dx = [-a^n x^{-n}]_a^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{a^n}{x^n}\right) - (-1) = 1$  ✓

**Aufgabe 2** Das  $k$ -te Moment ( $k \in \mathbb{N}_0$ ) einer Zufallsvariable  $X$  mit Dichtefunktion  $f$  ist

$$M_k := \int_D x^k f(x) dx$$

Der Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable berechnet sich als

- Erwartungswert:  $E[X] := M_1$
- Varianz:  $\text{Var}(X) := M_2 - M_1^2$  (häufig als „Verschiebungsformel“ bezeichnet)

Für diese Aufgabe ist  $f : [0, \infty)$  für  $\lambda > 0$  die Dichte aus der ersten Aufgabe:  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .

(a) Erwartungswert

Mithilfe partieller Integration ergibt sich ( $u = x$ ,  $v' = f(x)$ ):

$$\begin{aligned} E[X] = M_1 &= \int_D x f(x) dx = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= -x e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 + \left[ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^\infty = 0 - \left( -\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

### Varianz

Für das zweite Moment findet man unter Nutzung einer zweifachen partiellen Integration:

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_D x^2 f(x) dx = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \underbrace{-x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty 2x \cdot e^{-\lambda x} dx \\ &= \underbrace{-\frac{2}{\lambda} x e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \frac{2}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[ -\frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right]_0^\infty = 0 - \left( -\frac{2}{\lambda^2} \right) = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Also gilt für die Varianz:

$$\text{Var}(X) = M_2 - M_1^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

### Interpretation von $\lambda$

Betrachtet man für die Zufallsvariable  $X$  z.B. die zufällige Wartezeit an der Kasse, so ist ihr Erwartungswert  $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ , also z.B.  $E[x] = 5$  Minuten. Damit beschreibt

$$\lambda = \frac{1}{E[X]} = \frac{1}{5 \text{ Minuten}}$$

die inverse erwartete Wartezeit.

Im Allgemeinen zeigt das Ergebnis für  $E[X]$ , dass der Parameter  $\lambda$  den **inversen Erwartungswert** (die sog. **Rate**) der Zufallsvariable  $X$  mit obiger Dichte  $f$  bezeichnet.

- (b) Für  $M_2$  wurde in Teilaufgabe a) zweifach partiell integriert, was aufgrund der Vorarbeit bezüglich  $M_1$  gar nicht notwendig war. Nach der ersten partiellen Integration für  $M_2$  kann das noch ausstehende Integral auf das erste Moment zurückgeführt werden. Dies folgt aus der zweiten Zeile der obigen Rechnung in Teilaufgabe a):

$$\begin{aligned} M_2 &= (\dots) = \int_0^\infty 2x \cdot e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \frac{2}{\lambda} \cdot x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x f(x) dx = \frac{2}{\lambda} \cdot M_1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Für das dritte Moment findet man analog:

$$\begin{aligned} M_3 &= \int_D x^3 f(x) dx = \int_0^\infty x^3 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \underbrace{-x^3 e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty 3x^2 \cdot e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{3}{\lambda} \cdot x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{3}{\lambda} \int_0^\infty x^2 f(x) dx = \frac{3}{\lambda} \cdot M_2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ebenso erhält man für allgemeines  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} M_k &= \int_D x^k f(x) dx = \int_0^\infty x^k \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \underbrace{-x^k e^{-\lambda x}}_{=0} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty kx^{k-1} \cdot e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{k}{\lambda} \cdot x^{k-1} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{k}{\lambda} \int_0^\infty x^{k-1} f(x) dx = \frac{k}{\lambda} \cdot M_{k-1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Für die **allgemeine Rekursion**  $M_k = C \cdot M_{k-1}$  findet man:

$$\boxed{M_k = \frac{k}{\lambda} \cdot M_{k-1}, \quad \text{also} \quad C = \frac{k}{\lambda}}$$

Wertet man die Rekursion aus, so erhält man:

$$M_k = \frac{k}{\lambda} M_{k-1} = \frac{k}{\lambda} \cdot \frac{k-1}{\lambda} M_{k-2} = \frac{k(k-1)}{\lambda^2} \cdot \frac{k-2}{\lambda} M_{k-3} = \dots = \frac{k!}{\lambda^k} M_0$$

Insgesamt folgt als **expliziter Ausdruck** für das  $k$ -Moment einer Zufallsvariable  $X$  mit obiger Dichte  $f$ :

$$\boxed{M_k = \frac{k!}{\lambda^k}}$$

### Aufgabe 3

- (a) Für  $a > 0$  und Parameter  $k, l \in \mathbb{R}$  gilt aufgrund des ungeraden Integranden  $f(x) = \cos(kx) \sin(lx)$ , der über ein zur Null symmetrisches Intervall  $[-a, a]$  integriert wird, stets

$$\int_{-a}^a \cos(kx) \sin(lx) dx = 0$$

- (b) Im Folgenden sind die Parameter  $k, l \in \mathbb{R}$  auf  $|k| \neq |l|$  einzuschränken. Unter Nutzung der trigonometrischen Identität

$$(*) \quad \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

findet man für das erste zu untersuchende nachstehende Integral:

$$\begin{aligned} I_{cc}(x; k, l) &:= \int \cos(kx) \cos(lx) dx \stackrel{(*)}{=} \\ &= \frac{1}{2} \int [\cos((k-l)x) + \cos((k+l)x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin((k-l)x)}{k-l} + \frac{\sin((k+l)x)}{k+l} \right] + c \\ &= \frac{1}{2(k^2 - l^2)} [(k+l) \sin((k-l)x) + (k-l) \sin((k+l)x)] + c \end{aligned}$$

Gruppiert man in der Klammer nach Termen mit Vorfaktor  $k$  bzw.  $l$ , so gilt:

$$\begin{aligned} k(\sin((k-l)x) + \sin((k+l)x)) &= 2k \sin(kx) \cos(lx) \\ l(\sin((k-l)x) - \sin((k+l)x)) &= -2l \sin(lx) \cos(kx) \end{aligned}$$



Dies ergibt sich aus dritten trigonometrischen Identität (Terme bei  $k$ ):

$$(***) \quad \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin(\alpha) \cos(\beta) =$$

sowie der daraus resultierenden Identität beim Vertauschen von  $\alpha$  und  $\beta$  (Terme bei  $l$ ):

$$(***)' \quad \sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) = -2 \sin(\beta) \cos(\alpha)$$

Damit erhält man insgesamt:

$$I_{cc}(x; k, l) = \int \cos(kx) \cos(lx) dx = \frac{k \sin(kx) \cos(lx) - l \cos(kx) \sin(lx)}{k^2 - l^2} + c$$

Unter Nutzung der trigonometrischen Identität

$$(**) \quad \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

erhält man für das zweite zu untersuchende nachstehende Integral

$$I_{ss}(x; k, l) := \int \cos(kx) \cos(lx) dx \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{2} \int [\cos((k-l)x) - \cos((k+l)x)] dx$$

Bis auf ein relatives Vorzeichen im Integranden ist dieser Ausdruck identisch zu vorher, d.h. man erhält analog:

$$I_{ss}(x; k, l) = \int \sin(kx) \sin(lx) dx = \frac{l \sin(kx) \cos(lx) - k \cos(kx) \sin(lx)}{k^2 - l^2} + c$$

- (c) Es seien nun die beiden Parameter  $k, l \in \mathbb{N}$  natürliche Zahlen. Zu zeigen sind insgesamt vier Typen bestimmter Integrale, für deren Integrationsbereich stets  $[-\pi, \pi]$  gilt:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \begin{cases} 0 & , \text{ für } k \neq l \\ 1 & , \text{ für } k = l \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = \begin{cases} 0 & , \text{ für } k \neq l \\ 1 & , \text{ für } k = l \end{cases}$$

Fall 1:  $k \neq l$

- Für den ersten Integraltyp  $I_{cc}(x; k, l)$  gilt für  $k \neq l$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx &= \frac{1}{\pi} \left[ I_{cc}(x; k, l) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi(k^2 - l^2)} \left[ k \sin(k\pi) \cos(l\pi) - l \cos(k\pi) \sin(l\pi) \right. \\ &\quad \left. - (k \sin(-k\pi) \cos(-l\pi) - l \cos(-k\pi) \sin(-l\pi)) \right] = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die Null ergibt sich, da in jedem der vier Summanden die Sinus-Funktion bei einem Vielfachen ( $k, l \in \mathbb{N}$ ) von  $\pi$ , d.h. an einer Nullstelle, ausgewertet wird.

- Für den zweiten Integraltyp ergibt sich für  $k \neq l$  völlig analog:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ I_{ss}(x; k, l) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \checkmark$$

Fall 2:  $k = l$

Aus der Vorlesung ist die Stammfunktion von  $f(y) = \cos^2(y)$  bekannt,

$$\int \cos(y) \, dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \sin(y) \cos(y)$$

Mittels Substitution  $y = kx$  ergibt sich die für diesen Fall benötigte Stammfunktion:

$$\int \cos(kx) \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin(kx) \cos(kx)$$

- Für den ersten Integraltyp  $I_{cc}(x; k, l)$  gilt für  $k = l$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(kx) \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin(kx) \cos(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} (\pi + 0) = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Der trigonometrische Term in der Stammfunktion trägt nicht bei, da bei Ober- sowie Untergrenze die Sinus-Funktion bei einem Vielfachen ( $k \in \mathbb{N}$ ) von  $\pi$ , d.h. an einer Nullstelle, ausgewertet wird.

- Für den zweiten Integraltyp ergibt sich für  $k = l$  ebenfalls:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(kx) \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2(kx)) \, dx = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Kombiniert man die Ergebnisse aus dem Fall 1 und Fall 2, so erhält man die oben genannte Identitäten.

## A.2 Projekt 2 - Anwendungen der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Dieses Projekt beschäftigt sich mit den Werkzeugen des Kapitel 3 „Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher“. Es wird die Anwendung auf Reihen in Form der Taylor-Entwicklung in mehreren Variablen sowie Beispiele zu Abgrenzung von eingeführten Definitionen diskutiert.

### Aufgabe 1 Beispiel einer Taylor-Reihe, die nicht gegen die Ausgangsfunktion konvergiert

- (a) Wiederholen Sie im Falle einer Veränderlichen die Definition des Taylor-Polynoms sowie den Satz von Taylor.
- (b) Überzeugen Sie sich davon, dass es eine konvergente Taylor-Reihe gibt, die nicht gegen die Ausgangsfunktion konvergiert, indem Sie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{für } x \neq 0 \quad \text{und} \quad f(0) = 0$$

untersuchen. Wie lautet die Taylor-Reihe  $T(x)$  der Funktion  $f$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ ? Wie ist das Ergebnis zu interpretieren?

### Aufgabe 2 Taylor-Polynom für mehrdimensionale Skalarfelder

- (a) Im Falle einer Veränderlichen stellt das Taylor-Polynom erster Ordnung die Tangente an den Graphen dar. Der Tangentialraum verallgemeinert dieses Konzept auf  $d$  Variablen. Stellen Sie diese Konzepte gegenüber und identifizieren Sie in dem allgemeinen Ausdruck einen Gradienten. (In der Vorlesung wurde bereits der Spezialfall  $d = 2$  betrachtet.)
- (b) In die Taylor-Reihe gehen Ableitungen beliebig hoher Ordnung ein. Untersuchen Sie im Falle eines Skalarfeldes von drei Variablen, welche Ableitungen es bis zur dritten Ordnung gibt. Welche sind davon gleich, wenn der Satz von Schwarz anwendbar ist?
- (c) Betrachtet man ein Skalarfeld  $f$  von zwei Variablen, so ergibt sich als Taylor-Polynom zweiter Ordnung (quadratische Näherung) um den Entwicklungspunkt  $\vec{a} = (x_0, y_0)$ :

$$T_2(x, y) = f(\vec{a}) + f_x(\vec{a})(x - x_0) + f_y(\vec{a})(y - y_0) + \frac{1}{2} [f_{xx}(\vec{a})(x - x_0)^2 + (f_{xy}(\vec{a}) + f_{yx}(\vec{a}))(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(\vec{a})(y - y_0)^2]$$

Für  $d$  Variablen lautet das Taylor-Polynom zweiter Ordnung (Entwicklungspunkt  $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$  und  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ ):

$$T_2(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{a}) \cdot H_f(\vec{a}) (\vec{x} - \vec{a})$$

Identifizieren Sie die beiden auftretenden Skalarprodukte sowie das Matrix-Vektor-Produkt und zeigen Sie, dass die allgemeine Form die Darstellung für zwei Variablen enthält.

- (d) Berechnen Sie die Taylor-Polynome erster sowie zweiter Ordnung für die Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = x \cos(xy) + z \sin(z)$  um  $\vec{a} = (1, \pi, 0)^\top$ .

**Zusatzfrage:** Welche zusätzlichen Terme treten auf, wenn  $f$  bis zur dritten Ordnung entwickelt wird? Nutzen Sie für die Ableitungen  $f_{ijk}$  je eine Matrix  $M_i$  für  $i \in \{x, y, z\}$  und diskutieren Sie das notwendige Vorgehen qualitativ.

### **Aufgabe 3** Wiederholung: Stetigkeit von reellen Funktionen

Bestimmen Sie  $a \in \mathbb{R}$  derart, sodass die Funktion  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 2\sqrt{x}$  für  $x \geq x_0$  und  $f(x) = x^2 + ax + 2$  für  $x < x_0$  stetig ist, zunächst für  $x_0 = 1$ , anschließend für  $x_0 = 2$ . Bestimmen Sie außerdem die Ableitung von  $f$  wo möglich.

### **Aufgabe 4** Stetige Fortsetzung im $\mathbb{R}^2$

Betrachten Sie für  $a \in \mathbb{R}$  das zweidimensionale Skalarfeld

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob  $a \in \mathbb{R}$  derart gewählt werden kann, sodass  $g$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$  ist. Bestimmen Sie dabei insbesondere die Höhenlinien zu  $c \in \{-1, 0, 1\}$ .

### **Aufgabe 5** Gegenbeispiel zum Satz von Schwarz

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass  $f$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$  ist.
- Berechnen Sie abseits des Ursprungs alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  (insgesamt sind sechs Ableitungen zu berechnen).
- Bestimmen Sie im Ursprung die ersten partiellen Ableitungen  $f_x(0, 0)$  und  $f_y(0, 0)$ . Prüfen Sie, ob die partiellen Ableitungen  $f_x(x, y)$  und  $f_y(x, y)$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$  sind.
- Bestimmen Sie im Ursprung die gemischten zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  und zeigen Sie  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ .
- Begründen Sie, warum der Satz von Schwarz für die Funktion  $f$  nicht anwendbar ist.

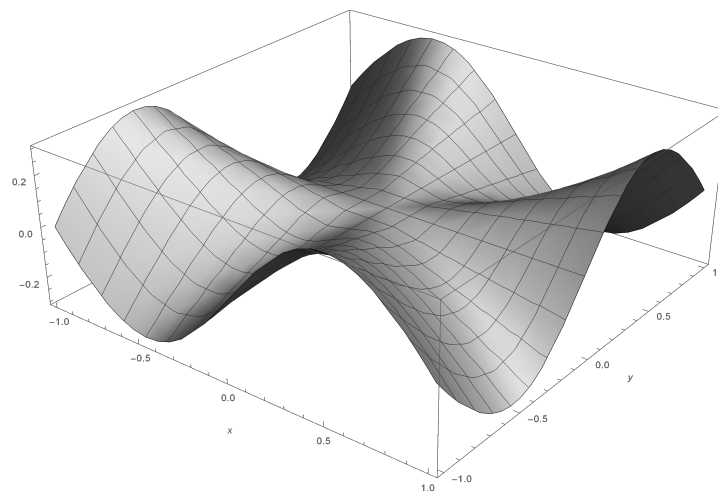


Abbildung: Darstellung von  $f(x, y)$  aus Aufgabe 5

Im Folgenden wird ein **Lösungsvorschlag** für das Projekt vorgestellt

### Aufgabe 1

(a) Die Definition des Taylor-Polynoms aus der Vorlesung ist:

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $f$  eine Funktion, die in der Umgebung von  $x_0$   $n$ -mal differenzierbar ist. Dann heißt

$$\begin{aligned} T_n(x) &:= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \end{aligned}$$

das **Taylor-Polynom** vom Grad  $n$  (bzw. der Ordnung  $n$ ) von  $f$  um  $x_0$ .

Darüber hinaus besagt der Satz von Taylor:

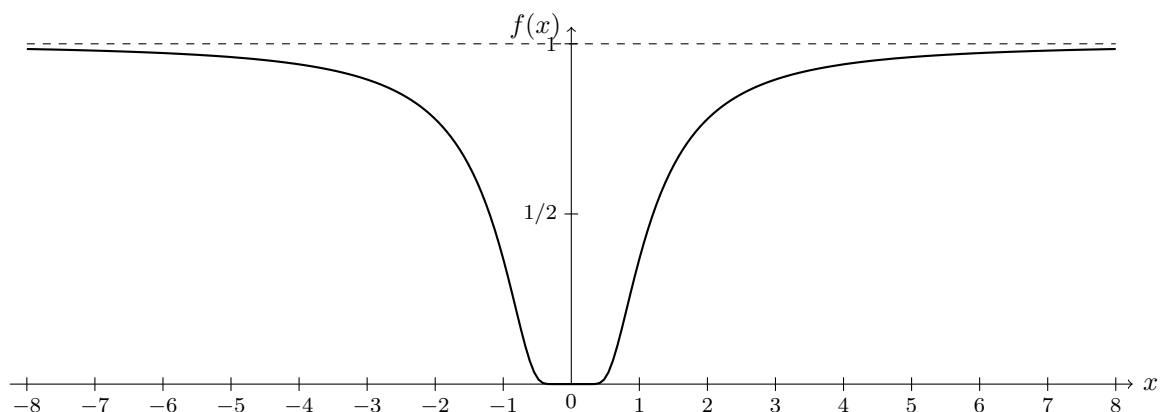
Ist  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $f$  eine  $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion, so ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  die Taylor-Reihe  $T(x)$  konvergent gegen die Ausgangsfunktion:  $f(x) = T(x)$ .  $R_n(x)$  bezeichnet dabei das Taylor-Restglied  $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ .

(b) Es gibt Funktionen, deren Taylor-Reihe  $T(x)$  existieren, aber *nicht* gegen die Ausgangsfunktion strebt:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- $f$  ist eine gerade Funktion
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$
- $f$  ist stetig, da  $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 = f(0)$



Um das Taylor-Polynom zu bestimmen, sind im Folgenden Ableitungen für  $x_0 \rightarrow 0$  zu betrachten:

- Die erste Ableitung für  $x \neq 0$  lautet

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Die erste Ableitung für  $x = 0$  lässt sich direkt über ihre Definition bestimmen unter Verwendung der Substitution  $z := \frac{1}{h}$ :

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{h^2}\right) - 0}{h} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} z \exp(-z^2) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\exp(z^2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{1 + z^2 + \frac{1}{2}z^4 + \dots} = 0 \end{aligned}$$

Im Nenner wurde dabei die MacLaurin-Reihe von  $\exp(z^2)$  verwendet, um Dominanz des Nenners im Grenzwert deutlich zu machen. Während der Zähler aus dem Monom  $z$  besteht, befinden sich im Nenner beliebig hohe Exponenten von  $z$ . Damit ergibt sich ein verschwindender Grenzwert.

Die Frage, ob die erste Ableitung (überall) stetig ist, lässt sich durch Betrachtung von  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  für  $x \neq 0$  beantworten. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{z \rightarrow \infty} 2z^3 \exp(-z^2) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3}{\exp(z^2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3}{1 + z^2 + \frac{1}{2}z^4 + \dots} = 0 \end{aligned}$$

Dabei wurde wieder eine Substitution  $z := \frac{1}{x}$  sowie die MacLaurin-Reihe verwendet. Man erhält damit die Stetigkeit von  $f'$  an der Stelle  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0) \quad \checkmark$$

- Die zweite Ableitung für  $x \neq 0$  lautet

$$f''(x) = \left( \frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Die zweite Ableitung für  $x = 0$  lässt sich wieder direkt über Definition bestimmen:

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{h^3} \exp\left(-\frac{1}{h^2}\right) - 0}{h} \\ &= \lim_{2z^4 \rightarrow \infty} z \exp(-z^2) \\ &= \lim_{2z^4 \rightarrow \infty} \frac{z}{\exp(z^2)} \\ &= \lim_{2z^4 \rightarrow \infty} \frac{z}{1 + z^2 + \frac{1}{2}z^4 + \dots} = 0 \end{aligned}$$

Die Rechnung sowie die Argumente verliefen hierbei analog zu den Grenzwerten, die bei der ersten Ableitung  $f'$  diskutiert worden sind. Ferner ergibt die Überprüfung der Stetigkeit von  $f''$  an der Stelle  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 0 = f''(0) \quad \checkmark$$

- Die bei der ersten und zweiten Ableitung beobachtete Systematik bleibt auch bei höheren Ableitungen erhalten. Es lassen sich für  $x \neq 0$  Ableitungen  $f^{(k)}(x)$  berechnen, die alle für  $x \rightarrow 0$  den Grenzwert Null besitzen. Ebenfalls gilt stets  $f^{(k)}(0) = 0$ . Die gemeinsame Ursache hierfür liegt in der Struktur

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\#}{x^p} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\#z^p}{\exp(z^2)} = 0 \quad \text{für alle Exponenten } p \in \mathbb{N}_0$$

Damit gilt für alle Ordnungen  $k \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(k)}(0) = 0$$

womit für das  $n$ -te Taylor-Polynom folgt:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

Also erhält man für die Taylor-Reihe  $T(x) = 0$ , d.h. die Nullfunktion.

Es ist offensichtlich, dass  $f(x) \neq 0$  für  $x \neq 0$ , d.h. die Taylor-Reihe stimmt nicht mit der Ausgangsfunktion überein:  $T(x) = 0 \neq f(x)$ . Vielmehr stimmen Taylor-Reihe und Ausgangsfunktion ausschließlich am Entwicklungspunkt  $x = 0$  überein, wobei gleichzeitig der Konvergenzbereich ganz  $\mathbb{R}$  ist (also  $r = \infty$ ).

Interpretation: Die Funktion  $f$  läuft aus der Null *langsamer als jedes Polynom* heraus:  $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ . Das *Nullpolynom*  $T(x) = 0$  mit Steigung Null, Krümmung Null, etc. ist die *beste polynomiale Approximation* an diesen *exponentiell unterdrückten* Kurvenverlauf in der Umgebung des Ursprungs.

## **Aufgabe 2** Taylor-Polynom erster Ordnung (also $n = 1$ mit $d$ ist Anzahl der Variablen $D \subseteq \mathbb{R}^d$ )

- (a)  $d = 1$ :  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$   
 $d \in \mathbb{N}$ :  $f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + f_1(\vec{a})(x_1 - a_1) + f_2(\vec{a})(x_2 - a_2) + \dots + f_d(\vec{a})(x_d - a_d)$   
 $= f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$

In der Verallgemeinerung den  $d$ -dimensionalen Entwicklungspunkt  $\vec{a} \in D \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $f_k$  ( $1 \leq k \leq d$ ) die erste Ableitung von  $f$  nach der  $k$ -ten Variable. Die auftretende Summe lässt sich als Skalarprodukt zwischen dem Gradienten  $\nabla f(\vec{a})$  und der Differenz zwischen Auswertungs- und Entwicklungspunkt  $\vec{x} - \vec{a}$ . Für den Spezialfall  $d = 2$  ergibt sich etwa:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

- (b) Man betrachte ein dreidimensionales Skalarfeld  $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und alle Ableitungen bis zur dritten Ordnung (d.h.  $d = 3$  und  $n = 3$ ).

1. Ableitungen :  $f_x, f_y, f_z$
2. Ableitungen :  $f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yx}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zx}, f_{zy}, f_{zz}$
3. Ableitungen :  $f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xxz}, f_{xyx}, f_{xyy}, f_{xyz}, f_{xzx}, f_{xzy}, f_{xzz},$   
 $f_{yxx}, f_{yxy}, f_{yxz}, f_{yyx}, f_{yyy}, f_{yyz}, f_{yzx}, f_{yzy}, f_{yzz},$   
 $f_{zxx}, f_{zxy}, f_{zxz}, f_{zyx}, f_{zyy}, f_{zyz}, f_{zzx}, f_{zzy}, f_{zzz}$

Im Allgemeinen sind  $3^1 = 3$  erste Ableitungen sowie  $3^2 = 9$  zweite Ableitungen möglich. Ist der Satz von Schwarz anwendbar, so verbleiben aufgrund der Stetigkeit  $\binom{4}{2} = 6$  unterschiedliche zweite Ableitungen. Es lassen sich im Allgemeinen  $3^3 = 27$  dritte Ableitungen finden, wovon im Falle von Stetigkeit  $\binom{5}{3} = 10$  unterschiedlich sind.<sup>1</sup>

(c) Für  $d = 2$  lautet die quadratische Näherung ( $n = 2$ ) um  $\vec{a} = (x_0, y_0)$ :

$$T_2(x, y) = f(\vec{a}) + f_x(\vec{a})(x - x_0) + f_y(\vec{a})(y - y_0) + \frac{1}{2} [f_{xx}(\vec{a})(x - x_0)^2 + (f_{xy}(\vec{a}) + f_{yx}(\vec{a}))(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(\vec{a})(y - y_0)^2]$$

Für  $d$  Variablen gilt in quadratischer Näherung ( $n = 2$ ):

$$T_2(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{a}) \cdot H_f(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

Dabei bezeichnet  $H_f(\vec{a})$  die Hesse-Matrix am Entwicklungspunkt und die ausgeschriebene Multiplikation je ein Skalarprodukt.

Die Gleichheit der Ausdrücke für  $d = 2$  lässt sich durch eine kurze explizite Rechnung unmittelbar nachweisen.

(d) Man betrachte  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = x \cos(xy) + z \sin(z)$  und den Entwicklungspunkt  $\vec{a} = (1, \pi, 0)^\top$  die Taylor-Polynome erster sowie zweiter Ordnung. Es ist  $d = 3$  und  $f(\vec{a}) = -1$ .

Benötigt wird also  $\nabla f(\vec{a})$  und  $H_f(\vec{a})$ :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos(xy) - xy \sin(xy) \\ -x^2 \sin(xy) \\ \sin(z) + z \cos(z) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \nabla f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$H_f = \begin{pmatrix} -xy^2 \cos(xy) - 2y \sin(xy) & -x^2 y \cos(xy) - 2x \sin(xy) & 0 \\ -x^2 y \cos(xy) - 2x \sin(xy) & -x^3 \cos(xy) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cos(z) - z \sin(z) \end{pmatrix}$$

mit

$$H_f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \pi^2 & \pi & 0 \\ \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit folgt für das Taylor-Polynom erster Ordnung:

$$T_1(x, y, z) = -1 + (-1)(x - 1) = -x$$

Für das Taylor-Polynom zweiter Ordnung folgt:

$$\begin{aligned} T_2(x, y, z) &= T_1(x, y, z) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - \pi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi^2 & \pi & 0 \\ \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - \pi \\ z \end{pmatrix} \\ &= -x + \frac{1}{2} (\pi x + y - 2\pi)^2 + z^2 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Es gilt: Für ein  $d$ -dimensionalen Skalarfeldes lassen sich im allgemeinen  $d^n$   $n$ -te Ableitungen finden, von denen im Falle von Stetigkeit  $\binom{n+d-1}{n}$  unterschiedlich sind.



### Aufgabe 3

Zur Wiederholung der Stetigkeit von reellen Funktionen betrachte man (für  $x_0 > 0$ ):

$$f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & , x \geq x_0 \\ x^2 + ax + 2 & , x < x_0 \end{cases}$$

Zunächst sei  $x_0 = 1$ , dann gilt  $f(x_0) = f(1) = 2$ . Der linksseitige Grenzwert muss im Falle von Stetigkeit mit dem Funktionswert übereinstimmen:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + a \cdot 1 + 2 = 3 + a \stackrel{!}{=} f(1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$$

In diesem Fall gilt für die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & , x > 1 \\ 2x - 1 & , x < 1 \end{cases}$$

mit den rechts- und linksseitigen Grenzwerten  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 1$ .

Für  $a = -1$  ist  $f$  also stetig sowie stetig differenzierbar.

Betrachtet man ferner  $x_0 = 2$ , dann gilt  $f(x_0) = f(2) = 2\sqrt{2}$ . Der linksseitige Grenzwert muss auch hier im Falle von Stetigkeit mit dem Funktionswert übereinstimmen:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 + 2a + 2 = 6 + 2a \stackrel{!}{=} f(2) = 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{2} - 3 < 0$$

In diesem Fall gilt für die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & , x > 2 \\ 2x + (\sqrt{2} - 3) & , x < 2 \end{cases}$$

mit den rechts- und linksseitigen Grenzwerten  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \sqrt{2} + 1$ .

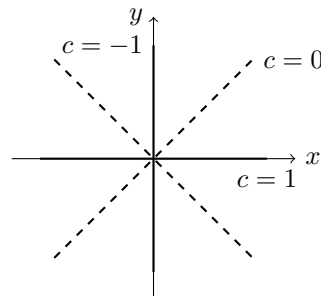
Für  $a = \sqrt{2} - 3$  ist  $f$  also stetig, jedoch in  $x = x_0 = 2$  nicht differenzierbar.

#### Aufgabe 4

Es soll untersucht werden, ob der Parameter  $a \in \mathbb{R}$  derart gewählt werden kann, sodass

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf ganz  $\mathbb{R}^2$  stetig ist.



Man betrachte die Höhenlinien  $c \in \{0, 1, -1\}$  abseits des Ursprungs  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$c = 0: \quad \text{Es ist } g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 0, \quad \text{d.h. für alle } |x| = |y|$$

$$c = 1: \quad \text{Es ist } g(x, y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x^2 + y^2, \quad \text{d.h. für alle } y = 0 \text{ (} x\text{-Achse)}$$

$$c = -1: \quad \text{Es ist } g(x, y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = -(x^2 + y^2), \quad \text{d.h. für alle } x = 0 \text{ (} y\text{-Achse)}$$

Aus dieser Untersuchung folgt, dass  $a \in \mathbb{R}$  mindestens *drei Werte gleichzeitig* annehmen müsste, damit  $g$  im Ursprung stetig ist:

- Stetigkeit entlang der  $x$ -Achse fordert  $a = 1$ .
- Stetigkeit entlang der  $y$ -Achse fordert  $a = -1$ .
- Stetigkeit entlang der beiden Winkelhalbierenden fordert  $a = 0$ .

Damit folgt, dass es keinen Parameter  $a \in \mathbb{R}$  gibt, sodass  $g$  stetig auf ganz  $\mathbb{R}^2$  ist.

**Aufgabe 5** Im Folgenden wird ein Gegenbeispiel zum Satz von Schwarz diskutiert. Dazu betrachte man die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Zunächst ist aufgrund der Darstellung als rationale Ausdruck die Funktion  $f$  stetig außerhalb des Ursprungs  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Um die Stetigkeit im Ursprung zu zeigen, ist für alle Folgen  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  zu zeigen, dass  $f(x, y) \rightarrow f(0, 0) = 0$  gilt. Dazu betrachte man

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \left| \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \right| = |xy| \cdot \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \\ &\leq |xy| \cdot \underbrace{\left( \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)}_{=1} \\ &= |xy| \end{aligned}$$

Da aus  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  folgt, dass  $|x| \rightarrow 0$  und  $|y| \rightarrow 0$  gilt, erhält man

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |xy| = 0 = f(0, 0) \quad \checkmark$$

Insgesamt folgt, dass  $f$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$  ist.

Bemerkung: Alternativ lässt sich dies auch dadurch begründen, dass außerhalb des Ursprungs im Zähler von  $g$  ein Polynom mit ausschließlich<sup>2</sup> Ordnung 4 steht, im Nenner hingegen nur

<sup>2</sup>Solche Polynome (in mehreren Variablen) nennt man **homogen**, z.B.  $x^3 y + x y^3$ ,  $x^2 + y^2$ ,  $xyz + x^2 y + y^2 z$

ausschließlich Ordnung 2. Aufgrund des größeren Exponenten strebt der Zähler schneller gegen Null als der Nenner, was den obigen Grenzwert erklärt.

(b) Abseits des Ursprungs für  $(x, y) \neq (0, 0)$  erhält man:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

Ferner findet man abseits des Ursprungs:

$$f_{xx} = \frac{4xy^3(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$f_{yy} = \frac{4x^3y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$f_{xy} = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3} = f_{yx}$$

Die Identität  $f_{xy} = f_{yx}$  gilt, da für  $(x, y) \neq (0, 0)$  die zweiten Ableitungen rationale Funktionen und damit stetig sind.

(c) Im Ursprung  $(x, y) = (0, 0)$  erhält man unter Nutzung der Definition von Ableitungen:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Es gilt:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Dieser Grenzwert gilt, da im Zähler ein homogenes Polynom fünfter Ordnung, im Nenner ein homogenes Polynom vierter Ordnung steht, der Zähler also schneller gegen Null strebt als der Nenner. Analog erhält man:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Damit sind die ersten partiellen Ableitungen  $f_x(x, y)$  und  $f_y(x, y)$  stetig auf ganz  $\mathbb{R}^2$ .

(d) Für die gemischten zweiten Partiiellen Ableitungen am Ursprung gilt:

$$f_{xy}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = -1$$

$$f_{yx}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{+\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = +1 \neq f_{xy}(0, 0)$$

(e) Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  gilt nach Teilaufgabe b):

$$f_{xy}(x, y) = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3}$$

Sowohl im Zähler als auch im Nenner stehen also homogene Polynome der Ordnung sechs, insbesondere sind also die Ordnungen in Zähler und Nenner gleich.

Abhängig davon, wie man sich dem Ursprung nähert, ändert sich der Grenzwert der zweiten gemischten Ableitungen  $f_{xy}(x, y)$  am Ursprung:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f_{xy}(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^4}{x^6} = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f_{xy}(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2 \cdot y^4}{y^6} = -1$$

Damit ist  $f_{xy}(x, y)$  am Ursprung eine unstetige Funktion, d.h. die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz sind nicht gegeben.

### A.3 Projekt 3 - Das Basler Problem II

In diesem Projekt wird ein Mehrfachintegral zur Lösung des Basler Problems genutzt. Die Darstellung ist an „Das Buch der Beweise“ (Springer Verlag, 2. Auflage 2004) angelehnt.

**Aufgabe** Ein alternativer Zugang zur Lösung des Basler Problems

- (a) Wiederholen Sie die mit Fourier-Analyse bereits gefundene Antwort zum Basler Problem:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$$

- (b) Zeigen Sie, dass der Wert des Doppelintegrals

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy$$

über  $G = [0, 1] \times [0, 1]$  identisch ist zur Summe der inversen Quadratzahlen:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = I$ .

*Hinweis:* Stellen Sie den Integranden  $f(x, y) \geq 0$  als geometrische Reihe dar. Nutzen Sie ferner, dass hier die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht werden kann.

- (c) In den folgenden Schritten wird das Doppelintegral  $I$  über  $G$  berechnet, indem neue Koordinaten  $u := \frac{1}{2}(x+y)$  sowie  $v := \frac{1}{2}(y-x)$  eingeführt werden.
- (i) Skizzieren Sie den Integrationsbereich  $G$  bezüglich  $(x, y)$  sowie bezüglich  $(u, v)$ . Zeigen Sie mithilfe der Jacobi-Determinante, dass  $dx dy = 2 du dv$  gilt.
- (ii) Stellen Sie das Integrationsgebiet  $G$  als Normalbereich bzgl. der Koordinate  $u$  dar. Zeigen Sie, dass sich  $I$  wie folgt schreiben lässt:

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2} dv du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2} dv du$$

- (iii) Werten Sie das Integral  $I$  aus und lösen Sie (zum zweiten Mal in dieser Vorlesung) das Basler Problem.

(d)\* Optionale Zusatzaufgabe und ex-post Würdigung des Vorgehens

Betrachten Sie nochmals das ursprüngliche Doppelintegral  $I$  in Teilaufgabe b). Man könnte ex-ante der Meinung sein, dass die Darstellung des Integrals über  $G = [0, 1]^2$  bezüglich der Koordinaten  $(x, y)$  recht vielversprechend ist.

- Führen Sie in diesen Koordinaten eine der beiden Integrationen aus und betrachten Sie das verbleibende Integral. Sie werden erkennen, dass es für dieses Integral keine analytische Stammfunktion gibt, weshalb die „straightforward“-Berechnung des Doppelintegrals  $I$  nicht zielführend ist<sup>1</sup>.
- Blicken Sie abschließend noch einmal auf das obige Vorgehen. Welche wesentliche Stellen gibt es nach Ihrer Meinung, die eine direkte analytische Lösung des Basler Problems ermöglichen?

---

<sup>1</sup>Das Ihnen vorliegende Integral wird als Dilogarithmus bezeichnet,  $\text{Li}_2(x)$ . Sie ist ein Spezialfall der Polylogarithmus-Funktionen,  $\text{Li}_n(x)$ . Bei Interesse können Sie weitere Informationen über diese interessanten speziellen Funktionen online finden.

Im Folgenden wird ein **Lösungsvorschlag** für das Projekt vorgestellt

### Aufgabe

- (a) In Übungsblatt 4, Aufgabe 3 wurde in der letzten Teilaufgabe mittels Fourier-Analyse gezeigt, dass für die Summe der inversen Quadratzahlen gilt:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- (b) Behauptung: Diese Summe lässt sich darstellen als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy$$

Nachweis: Mit der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = \frac{1}{1-xy} \quad \text{für } |xy| < 1$$

erhält man:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n dx dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_0^1 x^n dx}_{=\frac{1}{n+1}} \underbrace{\int_0^1 y^n dy}_{=\frac{1}{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die Vertauschung der Integrationen mit der Reihe ist erlaubt, da alle Beiträge positiv sind.

- (c) Um das Doppelintegral  $I$  zu berechnen, wird die Substitution

$$u := \frac{1}{2}(x+y) \quad \text{und} \quad v := \frac{1}{2}(y-x)$$

durchgeführt. Daraus folgt die Umkehrung  $x = u - v$  und  $y = u + v$ .

- (i) Das Integrationsgebiet lautet in den Koordinaten  $x$  und  $y$  (siehe linkes Panel in nachstehender Skizze):

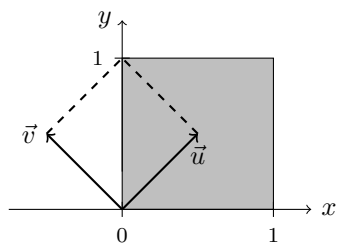
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Die neuen Koordinatenachsen zeigen dabei in Richtung

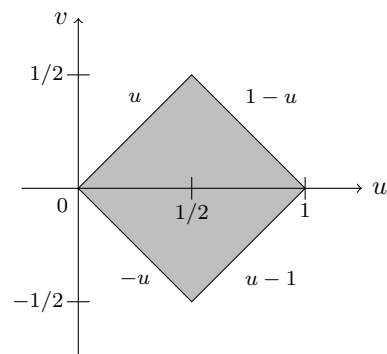
$$\vec{u} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Damit stellt sich der Integrationsbereich bezüglich der Koordinaten  $u$  und  $v$  dar wie im rechten Panel der nachstehenden Skizze gezeigt:

Integration bezüglich  $(x, y)$ -Koordinaten



Integration bezüglich  $(u, v)$ -Koordinaten



Für die Jacobi-Matrix der Substitution  $(x, y) \mapsto (u, v)$  gilt:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt für die Jacobi-Determinante  $\det J = 1 - (-1) = 2$ , d.h.

$$dx dy = |J| du dv = 2 du dv$$

- (ii) Mit der Substitution  $(x, y) \mapsto (u, v)$ , d.h.  $1 - xy = 1 - (u - v)(u + v) = 1 - u^2 + v^2$ , lässt sich das Doppelintegral  $I$  darstellen wie folgt:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} dx dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-u}^u \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{u-1}^{1-u} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du \quad \checkmark \end{aligned}$$

In einem ersten Schritt wurde dabei die  $u$ -Integration in zwei Teilbereiche geteilt:  $u \in [0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ , in denen sich die untere sowie obere Integrationsgrenze für  $v$  direkt darstellen lassen. Aufgrund der Symmetrie des (in  $v$  geraden) Integranden, lassen sich in einem zweiten Schritt die unteren Integrationsgrenzen für  $v$  auf Null setzen. Dies wird durch einen zusätzlichen globalen Faktor 2 vor dem Integral kompensiert.

- (iii) Das verbleibende Integral lässt sich mittels bekannter Stammfunktionen lösen. Mit

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

erhält man für  $a = \sqrt{1 - u^2}$ :

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}\right) du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \arctan\left(\frac{1 - u}{\sqrt{1 - u^2}}\right) du \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $u =: \sin(\theta)$ , d.h.  $du = \cos(\theta) d\theta$  erhält man für das erste Integral:

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}\right) du &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\theta)} \arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) \cos(\theta) d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{18} \end{aligned}$$

Wesentlich ist dabei die Vereinfachung  $\arctan(\tan(\theta)) = \theta$  sowie dem Kürzen der Jacobi-Determinante  $\cos(\theta)$ , sodass ein einfaches Polynom als Integrand verbleibt.

Analog erhält man mit der Substitution  $u =: \cos(\theta)$ , d.h.  $du = -\sin(\theta) d\theta$  für das zweite Integral:

$$\begin{aligned} 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u}}\right) du &= 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{\sin(\theta)} \arctan\left(\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) (-\sin(\theta)) d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^2}{9} \end{aligned}$$

In dieser Rechnung wurde die Halbwinkelformel

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

angewendet, sodass die Vereinfachung  $\arctan(\tan(\frac{\theta}{2})) = \frac{\theta}{2}$  genutzt werden konnte. Nach dem Kürzen der Jacobi-Determinante  $\sin(\theta)$  und der Berücksichtigung des negativen Vorzeichens durch Vertauschen der Integrationsgrenzen verbleibt auch hier ein einfaches Polynom als Integrand.

Fasst man die beiden Bestandteile des Integrals zusammen, so erhält man (erneut) die Lösung des Basler Problems:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = I = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6} \quad \checkmark$$