Übungsblatt 9 - Lösungshinweise

Aufgabe 1

a) f und g schneiden sich in $x_1 = 0$ und $x_2 = 5$. In diesem Bereich gilt $g(x) \geq f(x)$:

$$\int_0^5 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \frac{125}{6}$$

b) f und g schneiden sich in $x_1 = 0$ und $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$. In diesem Bereich gilt $f(x) \geq g(x)$:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Aufgabe 2 Nachstehend bezeichnet $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante:

a) $\displaystyle\int \left(2x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \pi^{\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{9}x^{\frac{9}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{\ln(\pi)}\pi^{\frac{x}{2}} + c$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) + c$
z.B. mittels Partialbruchzerlegung mit einfachen Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = x - \arctan(x) + c$

d) $\displaystyle\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{9}\left(3\ln(x) - 1\right) + c$
z.B. mittels partieller Integration mit $u' = x^2$ und $v = \ln(x)$

e) $\displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\arctan(x)\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$
z.B. mittels partieller Integration mit $u' = 1$ und $v = \arctan(x)$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-2x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\ln\left(1-2x^3\right) + c$ z.B. mittels logarithmischer Integration

g) $\displaystyle\int \left(\pi^{42x} + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{42\ln(\pi)}\pi^{42x} + c$

h) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3 - e}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{x^3-e} + c$ z.B. mittels Substitution $u = x^3$

i) $\displaystyle\int \frac{\tan(x+42)}{\cos^2(x+42)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan^2(x+42) + c$ z.B. mittels Substitution $u = \tan(x+42)$

j) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-6x^2+9x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\left(\ln(x) - \ln(x-3) - \frac{21}{x-3}\right) + c$
z.B. mittels Partialbruchzerlegung mit einfacher Nullstelle $x_1 = 0$ und doppelter Nullstelle $x_2 = 3$; Zwischenergebnis für die Zerlegung des Integranden:

$$\frac{2x+1}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} \quad \text{mit } A = \frac{1}{9}, B = -\frac{1}{9}, C = \frac{21}{9}$$

k) $\displaystyle\int \frac{(x^2-3x)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int\left(x - 6 + \frac{9}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 9\ln(x) + c$

l) $\displaystyle\int \frac{\left(\ln(x^3)\right)^2}{x}\,\mathrm{d}x = 9\int \frac{1}{x}\left(\ln(x)\right)^2\mathrm{d}x = 3\left(\ln(x)\right)^3 + c$
z.B. mit „Phönix aus der Asche“ d.h. partielle Integration mit $u' = \frac{1}{x}$ und $v = \ln(x)^2$

m) Zerlegung mittels Polynomdivision in Asymptote und gebrochenrationale Funktion:

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2}\,\mathrm{d}x &= \int\left(4 - \frac{8x^2-4x-8}{x^3+2x^2-x-2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\left(6x + \ln(x-1) + 3\ln(x+1) - 16\ln(x+2)\right) + c\end{aligned}$$

z.B. mittels Partialbruchzerlegung mit einfachen Nullstellen $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$; Zwischenergebnis für die Zerlegung des Integranden:

$$\frac{8x^2-4x-8}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \quad \text{mit } A = -\frac{4}{6}, B = -2, C = \frac{32}{3}$$

n) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^4+x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) - \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$
z.B. mittels Partialbruchzerlegung mit einfachen Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$ sowie quadratischem Term $x^2 - x + 1 \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$; Zwischenergebnis für die Zerlegung des Integranden:

$$\frac{x^2+x+1}{x^4+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} \quad \text{mit } A = 1, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{2}{3}, D = \frac{4}{3}$$

Dies führt zu $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^4+x}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{2x-4}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$. Die ersten beiden Terme integrieren zu einem Logarithmus, der letzte Term berechnet sich zu

$$-\frac{1}{3}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int\left(-\frac{1}{3}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$$

Davon ist der erste Summand über logarithmische Integration bestimmt, für den zweiten kann (nach quadratischer Ergänzung) z.B. die Substitution $u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ angewandt werden:

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Aus zwei der vier Teilergebnissen lässt sich noch wie folgt zusammenfassen:

$$-\frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\ln(x^2-x+1) = -\frac{1}{3}\ln\big((x+1)(x^2-x+1)\big) = -\frac{1}{3}\ln(x^3+1)$$

o) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} = -\ln\left(\cot(x) + \frac{1}{\sin(x)}\right) + c$

z.B. durch Erweiterung des Integranden mit $u = \cot(x) + \frac{1}{\sin(x)}$ (der gegebene $\sin(x)$ im Nenner des Integranden wird dabei dem Zähler zugeteilt) und anschließender Substitution mit genau diesem u führt zu:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} = \int \frac{\frac{\cot(x)}{\sin(x)} + \frac{1}{\sin(x)}}{\cot(x) + \frac{1}{\sin(x)}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln(u)$$

Aufgabe 3 Die nachstehenden bestimmten Integrale stellen die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse dar, falls der gesamte zu integrierende Bereich nicht negativ ist. Andernfalls stellt das Integral die bilanzierte(!) Fläche dar, also eine Verrechnung aus positiven sowie negativen Anteilen oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = 0$

Integral stellt <u>keine Fläche</u> dar, denn $\sin(x) < 0$ für $x \in (\pi, 2\pi)$.

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x = [-\ln(\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(2) \approx 0,35$

z.B. logarithmische Integration

Integral stellt <u>Fläche</u> dar, da $\tan(x) \geq 0$ für $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

c) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 + \frac{1}{2}} = [\arctan(2x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$

z.B. mittels Substitution mit $u = 2x$

Integral stellt <u>Fläche</u> dar, da Integrand positiv ist.

d) $\displaystyle\int_{e^{-n}}^{e^n} \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_{e^{-n}}^{e^n} = 2n\cosh(n) - 2\sinh(n)$

z.B. mittels partieller Integration mit $u' = 1$ und $v = \ln(x)$

Integral stellt <u>keine Fläche</u> dar, da $\ln(x) < 0$ für $x \in [e^{-n}, 1)$.

e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4+3x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{9}\sqrt{(4+3x)^3}\right]_0^1 = \frac{2}{9}\left(7\sqrt{7} - 8\right) \approx 2,34$

z.B. mittels Substitution $u = 4 + 3x$

Integral stellt <u>Fläche</u> dar, da Integrand positiv ist.

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \tan(x + x^{42}\sin^7(x^3))\,\mathrm{d}x = 0$

Wert des bestimmten Integrals auch ohne Stammfunktion nur aufgrund von Symmetrie berechenbar: Der Integrand ist eine ungerade Funktion (Punktsymmetrie zum Ursprung). Daher tragen zum Integral über das symmetrische Intervall $[-1, 1]$ gleiche Beiträge mit positivem sowie negativem Vorzeichen bei, die sich exakt aufheben.

Das Integral stellt <u>keine Fläche</u> dar.

Aufgabe 4 Es gilt im Folgenden $a > 0$:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} = \lim_{y\to 1^+} \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}\right]_y^2 = \infty$ (uneigentliches Integral existiert nicht)

b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} = \lim_{y\to\infty} \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}\right]_2^y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{y\to\infty}\frac{1}{(y-1)^2} = \frac{1}{2}$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{a+x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}}\Bigg(\underbrace{\lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}_{=\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}_{=-\frac{\pi}{2}}\Bigg) = \frac{\pi}{\sqrt{a}}$

z.B. mittels Substitution $u = \frac{x}{\sqrt{a}}$

d) $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \underbrace{\lim_{x\to a^-}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}_{=\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\lim_{x\to -a^+}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}_{=-\frac{\pi}{2}} = \pi$ (unabhängig von a)

z.B. mittels Substitution $u = \frac{x}{a}$