Übungsblatt 9

Aufgabe 1

a) Betrachten Sie die reellen Funktionen f, g mit $f(x) = x^2 - 2x - 1$ und $g(x) = 3x - 1$. Wie groß ist die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossene Fläche?

b) Die Graphen der beiden reellen Funktionen f und g mit $f(x) = 3xe^{-2x^2}$ und $g(x) = 2x$ schneiden sich für $x \in \mathbb{R}_0^+$ in genau zwei Punkten. Berechnen Sie den in diesem Bereich durch die Funktionsgraphen eingeschlossene Fläche.

Aufgabe 2 Berechnen Sie die nachstehenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int \left(2x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \pi^{\frac{x}{2}}\right) \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-2x^3}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \left(\pi^{42x} + 1\right) \mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3 - e}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \frac{\tan(x+42)}{\cos^2(x+42)}\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3 - 6x^2 + 9x}\,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int \frac{(x^2-3x)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int \frac{\left(\ln(x^3)\right)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int \frac{4x^3}{x^3 + 2x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x$

n) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^4+x}\,\mathrm{d}x$

o) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}$

Aufgabe 3 Berechnen Sie die nachstehenden bestimmten Integrale. Überlegen Sie, welche davon (so wie sie geschrieben stehen) die Fläche darstellen, die zwischen dem Funktionsgraphen des Integranden und der x-Achse liegt.
Hinweis: Eine Anpassung der Integrale, bei denen dies nicht zutrifft, ist nicht notwendig.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 + \frac{1}{2}}$

d) $\displaystyle\int_{e^{-n}}^{e^n} \ln(x)\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N})$

e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4+3x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \tan(x + x^{42}\sin^7(x^3))\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 4 Überprüfen Sie, welche der nachstehenden uneigentlichen Integrale existiert und berechnen Sie gegebenfalls den Wert. Nehmen Sie dabei für den Parameter $a > 0$ an.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}$

b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{a+x^2}$

d) $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$