Übungsblatt 8 - Lösungshinweise

Aufgabe 1 Mit der Definition der Ableitung $f'(x) := \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ folgt:

a) $f(x) = ax^4$ führt zu $f'(x) = 4ax^3$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ führt für $x \neq 0$ zu $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Aufgabe 2 Gegeben ist für Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}ax + b & \text{für } x \leq 1 \\ 2ax^3 - x + 3b & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Damit f differenzierbar ist, muss sie stetig sein. Aus der Stetigkeitsbedingung bei $x = 1$ folgt: $4b + 3a - 2 = 0$. Für $x \neq 1$ gilt für die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{für } x < 1 \\ 6ax^2 - 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Damit bei $x = 1$ die Ableitung existiert, muss die Bedingung $11a - 2 = 0$ erfüllt sein, also $a = \frac{2}{11}$. Damit folgt auch $b = \frac{4}{11}$.

Aufgabe 3 Nachstehend bezeichnet D den jeweils maximalen Definitionsbereich:

a) $f(x) = \dfrac{8x}{x^2 - 1}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ und $f'(x) = -\dfrac{8(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$ (für alle $x \in D$)

b) $f(x) = 2x\sqrt{x^2 - 9}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus (-3, 3) = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ und $f'(x) = \dfrac{4x^2 - 18}{\sqrt{x^2 - 9}}$ (nicht für $x \in \{\pm 3\} \subseteq D$)

c) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f'(x) = 2\left(x - \dfrac{1}{x^3}\right)$ (für alle $x \in D$)

d) $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{(2-x)(2+x)}}$ mit $D = [-2, 2]$ und $f'(x) = -\dfrac{x}{2\sqrt{4 - x^2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}}$ (nicht für $x \in \{\pm 2\} \subseteq D$)

e) $f(x) = \ln\left(x^2 + \cos^2(x)\right)$ mit $D = \mathbb{R}$ und $f'(x) = \dfrac{2(x - \sin(x)\cos(x))}{x^2 + \cos^2(x)}$ (für alle $x \in D$)

f) $f(x) = \exp\left(\sin(x^2 + x)\right)$ mit $D = \mathbb{R}$ und $f'(x) = \exp\left(\sin(x^2 + x)\right) \cdot \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$ (für alle $x \in D$)

g) $f(x) = 2x^{\frac{7}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{x^3} + \pi^{\frac{x}{2}}$ mit $D = \mathbb{R}^+$ und $f'(x) = 7x^{\frac{5}{2}} + \dfrac{3}{2x^{\frac{5}{2}}} - \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{\ln(\pi) \cdot \pi^{\frac{x}{2}}}{2}$ (für alle $x \in D$)

h) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)$ mit $D = \mathbb{R}^+$ und $f'(x) = \dfrac{3}{4x}$ (für alle $x \in D$)

i) $f(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin(x)}$ mit $D = \mathbb{R}$ und (für alle $x \in D$):

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin(x)} \cdot \left[\cos(x) \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right) + \frac{4x\sin(x)}{(x^2+1)(x^2+3)}\right]$$

Aufgabe 4 Die nachstehenden Grenzwerte werden allesamt mit L'Hopital bestimmt:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2e^x}{(e^x-1)^2} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+x^2}{\sin(e^{2x}-1)} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{3x})\cot(2x) = -\dfrac{3}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{e^{2x}-1}} = e$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(5^{\frac{3}{x}} - 3^{\frac{4}{x}}\right) = 3\ln(5) - 4\ln(3)$

Aufgabe 5 Nachstehend bezeichnet D den jeweils maximalen Definitionsbereich:

a) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ mit $D = [-1, 1]$. Es gibt keine lokalen Extrema, denn

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}\right) > 0$$

Es ist $f(-1) = -\sqrt{2}$ und $f(1) = \sqrt{2}$. Damit liegt das globale Minimum bei $(-1, -\sqrt{2})$, das globale Maximum bei $(1, \sqrt{2})$

b) $g(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$ mit $D = \mathbb{R}$ und $g'(x) = 1 - 2\sin^2(x)$. Es gibt daher unendliche viele globale Maxima $x_n = \frac{\pi}{4}(2n+1)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ (das sind ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{4}$).
Für die zweite Ableitung gilt: $g''(x) = -4\sin(x)\cos(x) = -4 \cdot g(x)$
Damit liegen die lokalen Maxima bei $(x_n, \frac{1}{2})$ für n gerade und die lokalen Minima bei $(x_n, -\frac{1}{2})$ für n ungerade.
Globale Extrema sind nicht eindeutig und fallen mit den lokalen Extrema zusammen.

c) $h(x) = \dfrac{2x+2x^2}{x^2-x-6}$ mit $D = \mathbb{R}\setminus\{-2, 3\}$ (Nullstellen des Nenners sind auszuschließen).
Es gilt:

$$h'(x) = -\frac{4x^2+24x+12}{(x^2-x-6)^2} \quad \text{und} \quad h''(x) = \frac{8(x^3+9x^2+9x+15)}{(x^2-x-6)^3}$$

Es ergeben sich Nullstellen der ersten Ableitung bei $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{6}$ mit

$$h''(x_1 = -3-\sqrt{6}) > 0 \quad \Rightarrow \text{ lokales Minimum bei } \left(-3-\sqrt{6}, \frac{2}{25}\left(11+4\sqrt{6}\right)\right)$$

$$h''(x_2 = -3+\sqrt{6}) < 0 \quad \Rightarrow \text{ lokales Maximum bei } \left(-3+\sqrt{6}, \frac{2}{25}\left(11-4\sqrt{6}\right)\right)$$

Es gibt keine globalen Extrema, denn Grenzwertbetrachtung führt zu

$$\lim_{x\to -2^-} h(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} h(x) = +\infty$$

Ergänzende Betrachtung: Es gilt ferner $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = 2$. Daraus folgt, dass einige Werte in $\mathbb{R}$ durch die Funktion h nicht erreicht werden:

$$W = \mathbb{R} \setminus \overline{W} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{2}{25}\left(11 - 4\sqrt{6}\right), \frac{2}{25}\left(11 + 4\sqrt{6}\right) \right)$$

Aufgabe 6 Betracht wird eine handelsübliche Konservendose[1] mit zylindrischer Form mit Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$.

a) Das Volumen eines Zylinders lautet $V = r^2\pi h$, seine Oberfläche lautet $A = 2r\pi h + 2r^2\pi$.

b) Mit $h = \frac{V}{r^2\pi}$ gilt $A(r) = 2r\pi h + 2r^2\pi = \frac{2V}{r} + 2r^2\pi$ sowie

$$A'(r) = \frac{\mathrm{d}A(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{2V}{r^2} + 4r\pi \quad \text{und} \quad A''(r) = \frac{\mathrm{d}^2A(r)}{\mathrm{d}r^2} = \frac{4V}{r^3} + 4\pi$$

Kandidaten für lokale Extrema von $A'(r) = 0 \iff r = r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Aus der zweiten Ableitung folgt: $A''(r_0) > 0$, d.h. r_0 minimiert die Fläche $A(r)$.

c) Es gilt im optimalen Fall $V = 2\pi r_0^3$ (aus der Bedingung $A'(r) = 0$). Ferner gilt allgemein $V = r_0^2\pi h$. Damit folgt $h = 2r_0$ und für das Verhältnis „Durchmesser zu Höhe“ $\frac{2r_0}{h} = 1$.

Aufgabe 7 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3e^x + 1 + \sin(x)$ mit $f'(x) = 3e^x + \cos(x)$. Die allgemeine Tangentengleichung lautet:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

a) Für $x = \pi$ gilt $f(\pi) = 3e^\pi + 1$ und $f'(\pi) = 3e^\pi - 1$. Damit ergibt sich als Tangentengleichung $T(x) = 3e^\pi + 1 + (3^\pi - 1)(x - \pi)$.
Es gilt approximativ: $f(\pi + 0,1) \approx T(\pi + 0,1) = 3e^\pi + 1 + (3e^\pi - 1) \cdot 0,1 = 77,264\ldots$
Der exakte Wert lautet $f(\pi + 0,1) = 3e^{\pi+0,1} + 1 + \sin(\pi + 0,1) = 77,623\ldots$
Dies stellt eine Abweichung von $\frac{0,359}{77,623} \approx 0,46\%$ dar.

b) Für $x = 0$ gilt $f(0) = 4$ und ebenfalls $f'(0) = 4$. Damit ergibt sich als Tangentengleichung $T(x) = 4 + 4x$.
Es gilt approximativ: $f(0,1) \approx T(0,1) = 4,4$.
Der exakte Wert lautet $f(0,1) = 3e^{0,1} + 1 + \sin(0,1) = 4,4153\ldots$
Dies stellt eine Abweichung von $\frac{0,0153}{4,4153} \approx 0,35\%$ dar.

[1] Weiterführende Bemerkung: In dieser Aufgabe ist eine zylindrische Dose vorgegeben für die der optimale Materialeinsatz berechnet wird. Sucht man hingegen die optimale *Form* um bei gegebenem Volumen minimale Oberfläche zu erhalten, so ergibt sich eine Kugel als optimale Lösung. Problematisch dabei ist allerdings das Rollverhalten der optimierten Dose sowie die Frage nach einem geeigneten Dosenöffner.

Aufgabe 8

a) Betrachte $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ mit $D = \mathbb{R}^+$. Es gilt:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0^+$

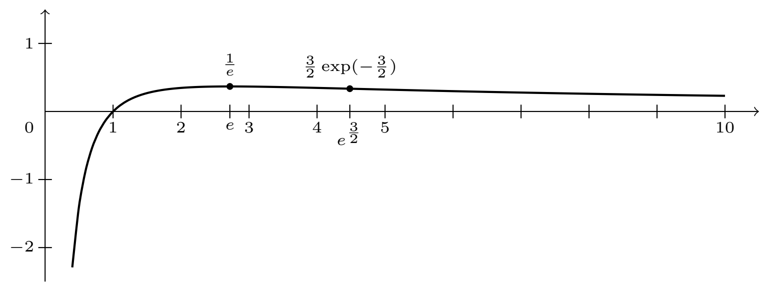
Asymptoten: Für $x \to \infty$ ist die Asymptote $y = 0$

Nullstellen: $f(x) = 0 \iff x = 1$

Monotonie: $f'(x) = 0 \iff x = e$. Für $x < e$ gilt $f'(x) > 0$, also ist dort die Funktion streng monoton steigend. Für $x > e$ gilt $f'(x) < 0$, also ist dort die Funktion streng monoton fallend.

Extrema: $f''(e) < 0$, also gibt es ein lokales Maximum bei $(e, \frac{1}{e})$. Dies ist ebenfalls globales Maximum.

Krümmungsverhalten: $f''(x) = 0 \iff x = \exp(\frac{3}{2})$. Für $x < \exp(\frac{3}{2})$ gilt $f''(x) < 0$, also ist dort die Funktion rechtsgekrümmt (konkav). Für $x > \exp(\frac{3}{2})$ gilt $f''(x) > 0$, also ist dort die Funktion linksgekrümmt (konvex). Der Wendepunkt liegt bei $(\exp(\frac{3}{2}), \frac{3}{2}\exp(-\frac{3}{2}))$.



b) Betrachte $g(x) = \dfrac{|a + 5x|}{x}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gilt für $x \neq -\frac{a}{5}$:

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{a}{x^2} & \text{für } x > -\frac{a}{5} \\ \frac{a}{x^2} & \text{für } x < -\frac{a}{5} \end{cases} \quad \text{und} \quad g''(x) = \begin{cases} \frac{2a}{x^3} & \text{für } x > -\frac{a}{5} \\ -\frac{2a}{x^3} & \text{für } x < -\frac{a}{5} \end{cases}$$

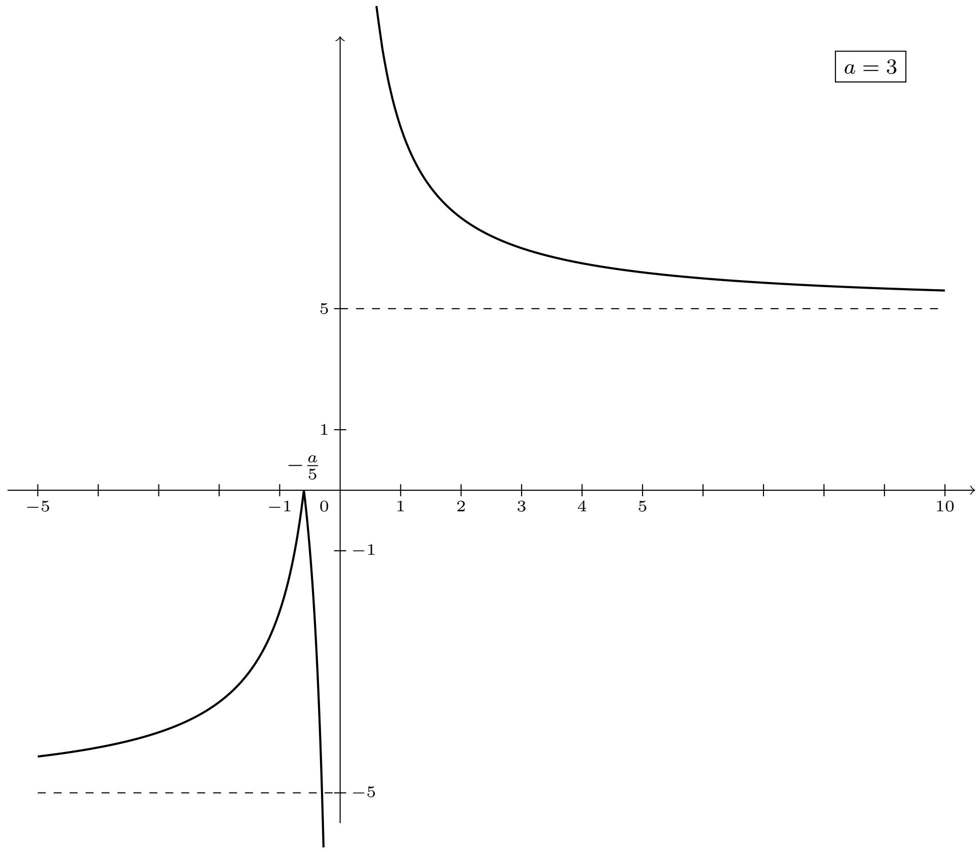
Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 5, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -5$ sowie $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$

Asymptoten: Für $x \to \infty$ ist die Asymptote $y = 5$, für $x \to -\infty$ ist die Asymptote $y = -5$.

Nullstellen: $g(x) = 0 \iff x = -\frac{a}{5}$

Monotonie: Für $x < -\frac{a}{5}$ gilt $g'(x) > 0$, also ist dort die Funktion streng monoton steigend. Für $x > -\frac{a}{5}$ gilt $g'(x) < 0$, also ist dort die Funktion streng monoton fallend.

Extrema: $g''(x) \neq 0$ für alle $x \neq -\frac{a}{5}$. Für $x = -\frac{a}{5}$ ergibt sich aus der Monotonie ein lokales Maximum $(-\frac{a}{5}, 0)$. Wegen der Grenzwerte $x \to 0$ gibt es keine globalen Extrema.
Krümmungsverhalten: Es gilt $g''(x) > 0$ sowohl für $x < -\frac{a}{5}$ also auch für $x > 0$. Dort ist die Funktion linksgekrümmt (konvex). Es gilt hingegen $g''(x) < 0$ für $-\frac{a}{5} < x < 0$. Dort ist die Funktion rechtsgekrümmt (konkav).



c) Betrachte $h(x) = x^x = \exp(x \cdot \ln(x))$ mit $D = \mathbb{R}^+$. Es gilt

$$h'(x) = x^x \cdot (1 + \ln(x)) \quad \text{und} \quad h''(x) = x^x \cdot \left(\frac{1}{x} + (1 + \ln(x))^2\right)$$

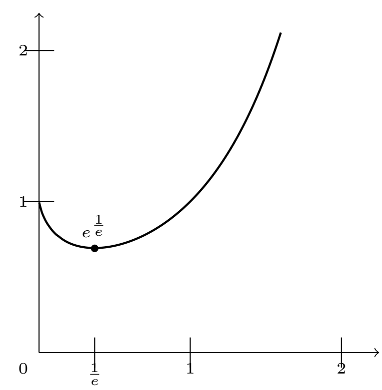
Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 1, \quad \lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \infty$

Nullstellen: Es gibt keine Nullstellen, denn $h(x) > 0$ für alle $x \in D$.

Monotonie: $h(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e}$. Für $x < \frac{1}{e}$ gilt $h'(x) < 0$, also ist dort die Funktion streng monoton fallend. Für $x > \frac{1}{e}$ gilt $h'(x) > 0$, also ist dort die Funktion streng monoton steigend.

Extrema: $h''(\frac{1}{e}) > 0$ also ergibt sich ein lokales Minimum bei $(\frac{1}{e}, e^{-\frac{1}{e}})$. Dies ist zugleich das globale Minimum. Wegen des Grenzwertes $x \to \infty$ gibt es kein globales Maximum.

Krümmungsverhalten: Es gilt $h''(x) > 0$, daher ist die Funktion stets linksgekrümmt (konvex).



Aufgabe 9

a) Der Abstand zwischen Ursprung und Punkten (x,y) der Kurve $y = x^2 - 3x + 3$ lautet $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Da die Wurzelfunktion monoton ist, sind die Position der Extrema von d und d^2 identisch. Es ist also $f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + (x^2 + 3x - 3)^2$ zu minimieren. Es gilt:

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9, \quad f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 32x - 18, \quad f''(x) = 12x^2 - 36x + 32$$

Aus $f'(x) = 0$ folgt $x_1 = 1$ sowie mit Polynomdivision $f'(x) = (x-1)\underbrace{(4x^2 - 14x + 18)}_{\neq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}}$.

Es gibt also nur eine reelle Lösung $x_1 = 1$ von $f'(x) = 0$. Mit $f''(1) > 0$ ist $(x,y) = (1,1)$ der gesuchte Punkt der Kurve mit dem geringsten Abstand zum Ursprung.

b) Für die Krümmung einer Funktion f gilt: $\kappa(x) = \dfrac{f''(x)}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$. Für $f(x) = e^x$ folgt:

$$\kappa(x) = \frac{e^x}{[1 + e^{2x}]^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \kappa'(x) = \frac{e^x - 2e^{3x}}{[1 + e^{2x}]^{\frac{5}{2}}}$$

Es gilt $\kappa'(x) = 0$ falls $x = x_0 = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) = -\ln(\sqrt{2})$. Damit ist $\kappa(x_0) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.
Anstelle von $\kappa''(x)$ helfen zusätzlich die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \kappa(x) = 0$, um den Punkt x_0 als (lokales sowie globales) Maximum von $\kappa(x)$ zu identifizieren.

Aufgabe 10* Ein Klassiker: $e^\pi > \pi^e$ oder $e^\pi < \pi^e$? (freiwillige Zusatzaufgabe)

a) Betrachtet man für $x \in D = \mathbb{R}^+$ die Funktion $f(x) := h(x)^{\pi \cdot e}$, so gilt: $f(e) = e^\pi$ und $f(\pi) = \pi^e$. Da die Abbildung $(\,\cdot\,)^{\pi \cdot e}$ monoton steigend ist, stimmen die Position sowie die Art der Extrema von h und f überein. Es genügt also, die Extrema von h zu untersuchen.

b) Aus $h(x) = x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right) > 0$ folgt $h'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}(1 - \ln(x))$. Einzige Nullstelle von $h'(x)$ ist $x = e$.
Anstelle von $h''(x)$ helfen zusätzlich die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 1$, um den Punkt $x = e$ mit $f(e) = e^{\frac{1}{e}} > 1$ als (lokales sowie globales) Maximum von $h(x)$ zu identifizieren.
Damit folgt aber auch, dass die Funktion f ein (lokales sowie globales) Maximum bei $f(e) = e^\pi$ besitzt. Es gilt also $f(x) \leq f(e)$ für alle $x \in D$ und insbesondere die Antwort auf die Aufgabenstellung: $f(\pi) = \pi^e < f(e) = e^\pi$.
Der Test mit dem Taschenrechner ergibt: $\pi^e \approx 22,5$ und $e^\pi \approx 23,1$.