Übungsblatt 8

Aufgabe 1 Verwenden Sie direkt die Definition der Ableitung, um zu zeigen:

a) Die Funktion $f(x) = ax^4$ besitzt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x) = 4ax^3$

b) Die Funktion $g(x) = \dfrac{1}{x}$ besitzt für $x \neq 0$ die Ableitung $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\frac{g(x+\Delta x)}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$ gilt.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}ax + b & \text{für } x \leq 1 \\ 2ax^3 - x + 3b & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie für nachstehende Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ zunächst den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und anschließend die Ableitungen $f'(x)$.

a) $f(x) = \dfrac{8x}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = 2x\sqrt{x^2 - 9}$

c) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

d) $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{(2-x)(2+x)}}$

e) $f(x) = \ln\left(x^2 + \cos^2(x)\right)$

f) $f(x) = \exp\left(\sin(x^2 + x)\right)$

g) $f(x) = 2x^{\frac{7}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^3} + \pi^{\frac{x}{2}}$

h) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)$

i) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 3}\right)^{\sin(x)}$

Aufgabe 4 Berechnen Sie die nachstehenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + x^2}{\sin(e^{2x} - 1)}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} (1 - e^{3x}) \cot(2x)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{e^{2x} - 1}}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(5^{\frac{3}{x}} - 3^{\frac{4}{x}}\right)$

Aufgabe 5 Bestimmen Sie für folgende Funktionen jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie die lokalen und globalen Extrema:

a) $f(x) = \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$

b) $g(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

c) $h(x) = \dfrac{2x + 2x^2}{x^2 - x - 6}$

Aufgabe 6 Betrachten Sie eine handelsübliche Konservendose mit zylindrischer Form mit Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$. Es sollen im Folgenden r und h so gewählt werden, dass bei vorgegebenem Dosenvolumen V möglichst wenig Material verbraucht wird, d.h. die Oberfläche A minimal ist.

a) Überlegen Sie zunächst, dass $V = r^2\pi h$ und $A = 2r\pi h + 2r^2\pi$ gilt.

b) Schreiben Sie damit die Fläche $A(r)$ ausschließlich als Funktion des Radius und zeigen Sie, dass es einen Radius r_0 gibt, der die Funktion $A(r)$ minimiert.

c) Wie lautet im Falle eines optimalen Materialverbrauchs das Verhältnis aus Durchmesser (doppelter Radius) und Höhe der Dose?
Zusatzfrage: Wie verhält es sich bei Dosen[1] *in Ihrer Küche/Speisekammer?*

Aufgabe 7 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3e^x + 1 + \sin(x)$.

a) Bestimmen Sie die Tangentengleichung $T(x)$ an den Graphen im Punkt $(\pi, f(\pi))$ und damit näherungsweise $f(\pi + 0,1)$. Was ist die prozentuale Abweichung der Näherung?

b) Bestimmen Sie die Tangentengleichung $T(x)$ an den Graphen außerdem im Punkt $(0, f(0))$. Wie groß ist nun die prozentuale Abweichung der Näherung?

Aufgabe 8 Diskutieren Sie für den positiven Parameter $a > 0$ den Verlauf der Funktionen

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \quad g(x) = \frac{|a + 5x|}{x} \quad \text{und} \quad h(x) = x^x$$

Gehen Sie dabei auf folgende Aspekte ein: Grenzwerte am Rand des Definitionsbereichs, Asymptoten (nur für f und g), Nullstellen, Monotonieverhalten, Extrema, Krümmungsverhalten, Skizze des Funktionsgraphen.

Aufgabe 9 Untersuchen Sie nachstehende Fragen mithilfe der Differentialrechnung:

a) Bestimmen Sie den Punkt (x, y) der Kurve $y = x^2 - 3x + 3$, der den geringsten Abstand zum Ursprung besitzt.

b) Für welchen Wert $x \in \mathbb{R}$ ist die Krümmung $\kappa(x)$ der reellen Funktion $f(x) = e^x$ extremal? Handelt es sich dabei um ein Maximum oder ein Minimum?

Aufgabe 10* Ein Klassiker (freiwillige Zusatzaufgabe)

a) Überlegen Sie, wie die Funktion $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x^{\frac{1}{x}}$ helfen kann, um zu entscheiden, ob e^π oder π^e die größere reelle Zahl darstellt.

b) Untersuchen Sie die Extrema von h und entscheiden Sie, welche der oben genannten Zahlen die größere ist.

[1] Weiterführende Bemerkung: In dieser Aufgabe ist eine zylindrische Dose vorgegeben für die der optimale Materialeinsatz berechnet wird. Sucht man hingegen die optimale *Form* um bei gegebenem Volumen minimale Oberfläche zu erhalten, so ergibt sich eine Kugel als optimale Lösung. Problematisch dabei ist allerdings das Rollverhalten der optimierten Dose sowie die Frage nach einem geeigneten Dosenöffner.