# Übungsblatt 7 - Lösungshinweise

**Aufgabe 1** Es gilt hinsichtlich Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz:

a) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$: nicht monoton / beschränkt (z.B. durch 1) / nicht konvergent, sondern unbestimmt divergent

b) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$: nicht monoton / beschränkt (z.B. durch $\frac{4}{3}$) / konvergent gegen 1

c) $a_n = \binom{n}{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$: monoton steigend / nicht beschränkt / bestimmt divergent gegen $+\infty$

d) $a_n$ sei für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definiert durch $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 2) = \frac{a_n}{2} + 1$ mit Startwert $a_1 = 1$:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= \frac{a_1}{2} + 1 \\
a_3 &= \frac{a_2}{2} + 1 = \frac{a_1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \\
a_4 &= \frac{a_3}{2} + 1 = \frac{a_1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \\
a_5 &= \frac{a_4}{2} + 1 = \frac{a_1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \\
&\vdots \\
a_n &= \frac{a_1}{2^{n-1}} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} = \cdots = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge monoton steigend / beschränkt (z.B. durch 2) / konvergent gegen 2.

*Hinweis: Bei rekursiven Folgen $(a_n)$ ist es möglich, einen Grenzwert $a$ durch die Bedingung $a_n \to a$ und $a_{n+1} \to a$. „vorzuschlagen“. Dies ist keine Garantie für die Konvergenz der Folge, aber man weiß damit, wonach man suchen kann. In diesem Beispiel lautet die Bedingung: $a = \frac{a}{2} + 1$, also $a = 2$.*

**Aufgabe 2** Für $n \in \mathbb{N}$ betrachtet man die Folge

$$T_n = 23 + 67 \cdot 2^{-\frac{n}{10}} \ [^\circ\mathrm{C}]$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 23$

b) Auflösen nach $n$ ergibt: $n = -10 \cdot \log_2\left(\frac{t-23}{67}\right)$. Es folgt:

| $t$ [°C] | 30 | 25 | 23,5 | 23,1 |
|---|---|---|---|---|
| $\tilde{n} \in \mathbb{R}$ | 32,6 | 50,7 | 70,7 | 93,9 |
| $n \in \mathbb{N}$ | 33 | 51 | 71 | 94 |

**Aufgabe 3** Bei den nachstehenden Folgen wurde der Grenzwert für $n \to \infty$ untersucht:

a) $a_n = \dfrac{5n^2 + (-1)^n}{3n^2} \to \dfrac{5}{3}$

b) $a_n = \dfrac{7 - 2^{3n}}{8^{n+1} - 3} \to -\dfrac{1}{8}$

c) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right) - \dfrac{n}{2} \to \dfrac{1}{2}$ (Folge ist unabhängig von $n$)

d) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{3n} \to e^{-3}$

e) $a_n = \sin(\frac{\pi}{2} \cdot n)$ ist unbestimmt divergent

f) $a_n = \dfrac{\cos(42n)}{n^2} \to 0$, da Zähler beschränkt und $\frac{1}{n^2} \to 0$

g) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n^5 + 3}{7n^5 + 2n^2}$ ist unbestimmt divergent

h) $a_n = \cos\big(n(n+1)\pi\big) = 1$ (unabhängig von $n$)

i) $a_n = \dfrac{\sin(n)}{\ln(n)} \to 0$, da Zähler beschränkt und $\dfrac{1}{\ln(n)} \to 0$

j) $a_n = \left(\dfrac{n-5}{n}\right)^{4n} \to e^{-20}$

**Aufgabe 4** Gegeben ist die folgende Matrix $A_n = \begin{pmatrix} -2 & a_n & b_n \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & c & 0 \end{pmatrix}$ für $c \in \mathbb{R}$ sowie zwei Folgen $a_n = \dfrac{7n^2+3}{n^2-n+7}$ und $b_n = \sqrt{n^4 + 8n^2 - 5n + 1} - n^2$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Es gilt: $d_n = \det(A_n) = 2(c - a_n) + 3cb_n$. Ferner erhält man für die Folgen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 7 \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 4$$

Damit: $L(c) := \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 14(c-1)$

b) $L(c) = 0$ für $c = 1$, $L(c) = 42$ für $c = 4$.

**Aufgabe 5**

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2-x-12} = -\dfrac{1}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x+3}{x^2-x-12} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^3+2x}{5-7x^3} = -\dfrac{3}{7}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\frac{1}{3}x^4-x+3}{x^2-2x+1} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{x^2-5x-2}{x^3-x^2-x+1} - \dfrac{1}{x+1}\right) = -\dfrac{3}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)} = 2$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = 2$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\sin(x)}{x} = +\infty$

i) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1-\sin(x)}{x} = 0$

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4+x\cos(2x)-1}{2x^2-1} = +\infty$

Die gefragte Asymptoten lauten:

d) $a(x) = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{3}x + 1$

j) $a(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}$

**Aufgabe 6** Stetigkeit in $x_0$ ist gegeben, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

a) $f_1$ ist nicht stetig, denn $f_1$ ist unstetig in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = -1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f_1(x) = 1$$
$$f_1(0) = 1$$

b) $f_2$ ist stetig, denn $f_2$ ist stetig in allen Punkten, insb. in $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f_2(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 1^-} f_2(x) = 1$$
$$f_2(1) = 1$$

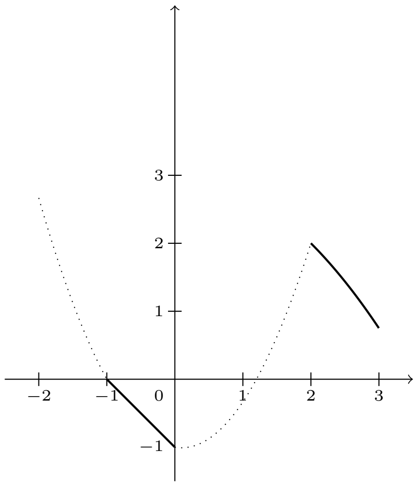
**Aufgabe 7** Stetigkeit in $x_0$ ist gegeben, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

a) Die Bedingung für Stetigkeit bei $x_0 = 1$ lautet: $\frac{2}{1+a} = 3$, also ist $f$ stetig, falls $a = -\frac{1}{3}$.

b) Die Bedingung für Stetigkeit bei $x_0 = 2$ lautet: $b^3 + 1 = \frac{1}{\ln(4)}$, also ist $g$ stetig, falls $b = \sqrt[3]{\frac{1}{\ln(4)} - 1} \approx -0,65$

**Aufgabe 8** Gegeben ist die von den Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Da $f$ abschnittsweise durch stetige Funktionen definiert ist, ist $f$ stetig, wenn Stetigkeit an den Grenzen $x \in \{-1, 0, 2\}$ garantiert ist. In nachstehender Graphik sind die durchgezogenen Linien solche, die ohne Festlegung der Parameter $a, b, c$ gezeichnet werden können.
*Bemerkung: Die gepunkteten Linien nehmen das Ergebnis aus Teilaufgabe c) vorweg und können erst zum Ende der Aufgabe gezeichnet werden.*




b) Die Stetigkeitsbedingungen lauten:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = a - b + c \overset{!}{=} f(-1) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = c \overset{!}{=} f(0) = -1$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4a + 2b + c \overset{!}{=} f(2) = 2$$

Dies lässt sich darstellen als $A\vec{x} = \vec{y}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Da $A$ invertierbar ist (z.B. $\det(A) \neq 0$), können die gesuchten Parameter berechnet werden über $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$. Mit Gauß erhält man

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

woraus die Parameter $a = \frac{5}{6}$, $b = -\frac{1}{6}$ und $c = -1$ für die Stetigkeit von $f$ folgen.
*Bemerkung: Der Funktionsgraph in Teilaufgabe a) ist für diese Parameter gezeichnet. Man erkannt aus dem Graphen, dass $f$ stetig ist.*