Übungsblatt 7

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die Folgen (a_n) auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

a) $a_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$

b) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$

c) $a_n = \binom{n}{n-2}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

d) a_n sei für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definiert durch $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 2)$ mit dem Startwert $a_1 = 1$

Aufgabe 2 Ein Körper mit anfänglicher Temperatur 90°C kühlt nach n Minuten ($n \in \mathbb{N}_0$) auf die folgende Temperatur ab:

$$T_n = 23 + 67 \cdot 2^{-\frac{n}{10}} \ [°\mathrm{C}]$$

a) Gegen welche Temperatur konvergiert die Temperatur des Körpers?

b) Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten die Temperatur des Körpers zum ersten Mal unter 30°C, 25°C, 23,5°C bzw. 23,1°C fällt.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz, bestimmte bzw. unbestimmte Divergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{5n^2 + (-1)^n}{3n^2}$

b) $a_n = \dfrac{7 - 2^{3n}}{8^{n+1} - 3}$

c) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right) - \dfrac{n}{2}$

d) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{3n}$

e) $a_n = \sin(\frac{\pi}{2} \cdot n)$

f) $a_n = \dfrac{\cos(42n)}{n^2}$

g) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n^5 + 3}{7n^5 + 2n^2}$

h) $a_n = \cos\big(n(n+1)\pi\big)$

i) $a_n = \dfrac{\sin(n)}{\ln(n)}$

j) $a_n = \left(\dfrac{n-5}{n}\right)^{4n}$

Aufgabe 4 Betrachten Sie folgende Matrix $A_n = \begin{pmatrix} -2 & a_n & b_n \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & c & 0 \end{pmatrix}$ für $c \in \mathbb{R}$ sowie zwei Folgen $a_n = \dfrac{7n^2 + 3}{n^2 - n + 7}$ und $b_n = \sqrt{n^4 + 8n^2 - 5n + 1} - n^2$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Gegen welchen Grenzwert konvergiert die Folge der Determinanten $d_n := \det(A_n)$ für $n \to \infty$ in Abhängigkeit von c?

b) Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist (d_n) eine Nullfolge, für welches $c \in \mathbb{R}$ konvergiert sie gegen 42?

Aufgabe 5 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2-x-12}$

b) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x+3}{x^2-x-12}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^3+2x}{5-7x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\frac{1}{3}x^4-x+3}{x^2-2x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{x^2-5x-2}{x^3-x^2-x+1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\sin(x)}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1-\sin(x)}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4+x\cos(2x)-1}{2x^2-1}$

Wie lauten für die Teilaufgaben d) und j) die Asymptoten für $x \to \infty$?

Aufgabe 6 Welche der folgenden reellen Funktionen ist stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $f_1(x) := \dfrac{x^2-x}{|x|}$ für $x \neq 0$ und $f_1(0) := 1$

b) $f_2(x) := \sqrt{x}$ für $x \geq 1$ und $f_2(x) := 2x-1$ für $x < 1$

Aufgabe 7 Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, damit die nachstehenden reellen Funktionen stetig sind.

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x+a} & x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} b^3+1 & \text{für } x \leq 2 \\ (b^3+1)^2 \ln(x^2) & x > 2 \end{cases}$

Aufgabe 8 Betrachten Sie für drei unbekannte Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ die reelle Funktion f:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c & \text{für } x < -1 \\ -(x+1) & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ ax^2+bx+c & \text{für } 0 < x < 2 \\ -\frac{1}{4}x^2+3 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie den Graphen von f in den von den Parametern unabhängigen Abschnitten. An welchen Stellen ergeben sich Bedingungen für a, b, c, falls f stetig sein soll?

b) Zeigen Sie, dass f stetig ist, falls die Parameter a, b, c folgende Gleichung erfüllen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b, c derart, dass f stetig ist.