Übungsblatt 6 - Lösungshinweise

Aufgabe 1 Gegeben sind nachstehende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Es gilt $\det(A) = 36$, $\det(B) = 0$, $\det(C) = -\frac{3}{\pi}$ und $\det(D) = -1$. Daher haben die Matrizen A, C, D eine Inverse, die Matrix B hingegen ist nicht invertierbar.

$$A^{-1} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(Rechenregel } 2 \times 2\text{)}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(Diagonalmatrix)}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -1 & -7 & 6 \\ -2 & -11 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{(Gauß)}$$

b) Da A, C, D invertierbar sind, haben sie vollen Rang:

$$\mathrm{Rg}(A) = 2, \quad \mathrm{Rg}(C) = 3, \quad \mathrm{Rg}(D) = 3$$

sowie nur den trivialen Kern: $\ker(A) = \{\vec{0}\} \subset \mathbb{R}^2$ und $\ker(C) = \ker(D) = \{\vec{0}\} \subset \mathbb{R}^3$.
In B sind die beiden Zeilen/Spalten voneinander linear abhängig, es gibt aber eine von Null verschiedene Zeile/Spalte, daher gilt $\mathrm{Rg}(B) = 1$. Der Kern berechnet sich über Gauß zu $\ker(B) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$

c) Aus der Rechenregel $\det(M_1 \cdot M_2) = \det(M_1) \cdot \det(M_2)$ folgt mit den Ergebnissen aus a):

$$\det(B^{42}) = (\det(B))^{42} = 0 \quad \text{und} \quad \det(D^{42}) = (\det(D))^{42} = +1$$

Aufgabe 2 Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

a) $\det(A) = a - 4$, d.h. für $a \neq 4$ ist A invertierbar. Mit Gauß ergibt sich:

$$A^{-1} = \frac{1}{a-4}\begin{pmatrix} a-3 & 1 & -1 \\ 9-2a & a-3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Aus dem Gauß-Verfahren der Teilaufgabe a) ergibt sich:

- Für $a \neq 4$ gilt: $\mathrm{Rg}(A) = 3$ (voller Rang) und $A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.
- Für $a = 4$ gilt: Im Gauß-Verfahren erhält man eine Nullzeile, d.h. $\mathrm{Rg}(A) = 2$ und $A\vec{x} = \vec{b}$ hat entweder keine oder unendliche viele Lösungen.
  Genauer: Mit Gauß ergibt sich ein Nullzeile mit nicht-verschwindenden Elementen auf der rechten Seite, Widerspruch, also keine Lösung für $a = 4$.

c) Nun gilt $a = 5$, also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Gegeben sind $A = \begin{pmatrix} b & a \\ -b & a+b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -b & -2a \end{pmatrix}$ für allgemeine $0 < a < b$. Gesucht ist die Matrix X, sodass

$$XB + (X - E_2)A = E_2$$

Auflösen nach X ergibt auf Ebene der reinen Gleichung, d.h. ohne A und B einzusetzen:

$$X = (E_2 + A)(A + B)^{-1}$$

mit $\det(A + B) = b^2 - a^2 + 2ab > 0$ (da laut Angabe $b > a > 0$ gilt). Damit ergibt sich:

$$X = \frac{1}{b^2 - a^2 + 2ab} \begin{pmatrix} b^2 + ab + b - a & a^2 - a \\ b^2 + 3ab + 2b & a^2 + b^2 + 3ab + a + b \end{pmatrix}$$

Für den Spezialfall $a = 1$ und $b = 2$ ergibt sich:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Gauß führt in allen drei Fällen auf Matrizen mit zwei Pivotelementen, d.h. der Rang ist für alle drei Matrizen gleich: $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A^\top A) = \mathrm{Rg}(AA^\top) = 2$.
Bei $A \in M(3,4)$ führt der Gauß-Algorithmus auf eine Nullzeile, bei $A^\top A \in M(4,4)$ auf zwei Nullzeilen, bei $AA^\top \in M(3,3)$ wieder auf eine Nullzeile.

b) Es gilt $\vec{v}^\top A \in M(1,4)$ und $(A^\top \vec{v})^\top (A^\top \vec{v}) \in M(1,1) = \mathbb{R}$. Explizit erhält man:

$$\vec{v}^\top A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A^\top \vec{v})^\top (A^\top \vec{v}) = 150$$

Aufgabe 5 Anwendung der Rechenregeln $E_n^\top = E_n$ und $(M_1 M_2)^\top = M_2^\top M_1^\top$ führt zu:

$$X = (E_n - 3B)(5E_n + 4A - 2C^\top)^{-1}$$

Aufgabe 6 Gegeben sind fünf Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_5 \in \mathbb{R}^5$ und $a \in \mathbb{R}$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -25 \\ 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

a) Gauß für $B := \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{pmatrix} \in M(5,3)$ führt unabhängig von $a \in \mathbb{R}$ zu drei Pivotelementen. Damit sind die drei Vektoren linear unabhängig.

b) Es sei nun $a = 5$. Gesucht ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^5$ in $A\vec{x} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1, -2, 1, 1, 1 \end{pmatrix}^\top$. Mit Gauß:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -25 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & -7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -80 & 29 & 97 & 64 & -23 \\ -39 & 14 & 47 & 31 & -11 \\ 95 & -34 & -115 & -74 & 27 \\ 41 & -15 & -49 & -34 & 12 \\ -14 & 5 & 17 & 11 & -4 \end{pmatrix}$$

Es folgt: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 0, 0, 1, 0, 0 \end{pmatrix}^\top = \vec{e}_3$

Aufgabe 7 Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 5 & -10 & 25 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeines Vorgehen: Die Eigenwerte einer Matrix $M \in M(n,n)$ werden über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda E_n) \overset{!}{=} 0$ bestimmt. Die Eigenvektoren sind je Eigenwert λ_i über den Kern von $A - \lambda_i E_n$ zu bestimmen. Dieser wird jeweils mithilfe des Gauß-Algorithmus bestimmt.

a) $\boxed{A}$

- $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$
- $\lambda_1 = 4$ mit Eigenvektoren aus $\ker(A - 4E_3) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix})$
- $\lambda_2 = 2$ mit Eigenvektoren aus $\ker(A - 2E_3) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$
- $\lambda_3 = 1$ mit Eigenvektoren aus $\ker(A - E_3) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

$\boxed{B}$

- $\chi_B(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = \big(\lambda - (5+3i)\big)\big(\lambda - (5-3i)\big)$
- $\lambda_1 = 5 + 3i$ mit Eigenvektoren aus $\ker(B - (5-3i)E_2) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix})$
- $\lambda_2 = 5 - 3i$ mit Eigenvektoren aus $\ker(B - (5+3i)E_2) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix})$

$\boxed{C}$

- $\chi_C(\lambda) = \lambda^2(30 - \lambda)$
- $\lambda_{1,2} = 0$ mit Eigenvektoren aus $\ker(C) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$
- $\lambda_3 = 30$ mit Eigenvektoren aus $\ker(C - E_3) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix})$

$\boxed{D}$

- $\chi_D(\lambda) = (2-\lambda)^2\big((1-\lambda)^2 - 4\big) = (2-\lambda)^2(\lambda - 3)(\lambda + 1)$
- $\lambda_{1,2} = 2$ mit Eigenvektoren aus $\ker(D - 2E_4) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$
- $\lambda_3 = 3$ mit Eigenvektoren aus $\ker(D - 3E_4) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$
- $\lambda_4 = -1$ mit Eigenvektoren aus $\ker(D + E_4) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$

b) Es gilt ganz allgemein, dass die **Determinante** einer Matrix $M \in M(n,n)$ identisch ist zum **Produkt ihrer Eigenwerte**:

$$\det(M) = \sum_{k=1}^{n} M_{kk} = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$

.

c) Es gilt ganz allgemein, dass die **Spur** (engl. 'trace') einer Matrix $M \in M(n,n)$ identisch ist zur **Summe ihrer Eigenwerte**:

$$\mathrm{tr}(M) := \sum_{k=1}^{n} M_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

.

Aufgabe 8 Gegeben sind $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^\top$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}^\top$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^\top$.

a) Die Drehmatrix ($\mathbb{R}^2$) lautet für $\alpha = 60°$, also mit $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ und $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} A\vec{e}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{(erste Spalte von } A\text{)} \\ A\vec{e}_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(zweite Spalte von } A\text{)} \\ A\vec{x} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 - 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix} \\ A\vec{y} &= \begin{pmatrix} 2 - 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Die Drehmatrix ($\mathbb{R}^3$) um die x-Achse lautet für $\alpha = 30°$, also mit $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin(30°) = \frac{1}{2}$:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$A\vec{z} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} - 1 \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\vec{z}_0 \in \mathbb{R}^3$ kann gefunden werden, indem $\vec{z}$ um $\beta = -\alpha = -30°$ um die x-Achse gedreht wird (inverse Drehung). Es gilt:

$$\vec{z}_0 = A^{-1}\vec{z} = A^\top \vec{z} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} + 1 \\ \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}$$

c) Für den Vektor $\vec{v}$ ergibt sich ein von der Geraden $\operatorname{span}(\vec{v})$ und der x-Achse eingeschlossener Winkel $\alpha = \arctan(\sqrt{3}) = 30°$. Damit ist $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$ und $\sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$S_{\vec{v},\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
S_{\vec{v},\alpha}\vec{e}_1 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} \quad \text{(erste Spalte von } S_{\vec{v},\alpha}\text{)}\\
S_{\vec{v},\alpha}\vec{e}_2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{(zweite Spalte von } S_{\vec{v},\alpha}\text{)}\\
S_{\vec{v},\alpha}\vec{x} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-3\\ 3\sqrt{3}+2\end{pmatrix}\\
S_{\vec{v},\alpha}\vec{y} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\sqrt{3}-4\\ 4\sqrt{3}+3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d) Für die allgemeine Spiegelungsmatrix $S_{\vec{v},\alpha} = \begin{pmatrix}\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha)\\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha)\end{pmatrix}$ gilt:

- $\det(S_{\vec{v},\alpha}) = -1$
- $\operatorname{tr}(S_{\vec{v},\alpha}) = 0$
- $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 1$
- $\lambda_1 = +1$ mit Eigenvektoren aus $\ker(S_{\vec{v},\alpha} - E_2) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix}\cot(2\alpha) + \frac{1}{\sin(2\alpha)}\\ 1\end{pmatrix})$
- $\lambda_2 = -1$ mit Eigenvektoren aus $\ker(S_{\vec{v},\alpha} + E_2) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix}\cot(2\alpha) - \frac{1}{\sin(2\alpha)}\\ 1\end{pmatrix})$