Übungsblatt 6

Aufgabe 1 Betrachten Sie nachstehende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Welche der Matrizen A, B, C, D besitzt eine Inverse? Bestimmen Sie diese.

b) Bestimmen Sie für jede der vier Matrizen ihren Rang sowie ihren Kern.

c) Bestimmen Sie die Determinante von B^{42} und D^{42}.

Aufgabe 2 Betrachten Sie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

a) Für welche Werte von a ist die Matrix A invertierbar? Wie lautet dann ihre Inverse?

b) Welchen Rang hat A in Abhängigkeit von a? Was lässt sich daraus über die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems (LGS) $A\vec{x} = \vec{b}$ aussagen?

c) Bestimmen Sie für $a = 5$ alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, sodass $A\vec{x} = \vec{b}$ gilt.

Aufgabe 3 Für die Einheitsmatrix E_2 und $A = \begin{pmatrix} b & a \\ -b & a+b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -b & -2a \end{pmatrix}$ ist die Matrix X gesucht, für die nachstehende Gleichung für allgemeine $0 < a < b$ erfüllt ist:

$$XB + (X - E_2)A = E_2$$

Überlegen Sie für den allgemeinen Fall, dass für $0 < a < b$ die erforderlichen inversen Matrizen existieren. Wie lautet X für den speziellen Fall $a = 1$ und $b = 2$?

Aufgabe 4 Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Rang von A, $A^\top A$ sowie $AA^\top$.

b) Überlegen Sie zunächst, warum die Ausdrücke $\vec{v}^\top A$ und $(A^\top \vec{v})^\top (A^\top \vec{v})$ mathematisch sinnvoll sind und berechnen Sie anschließend deren Ergebnisse.

Aufgabe 5 Es seien $A, B, C \in M(n, n)$. Finden Sie die Matrix X, sodass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$5X + 4XA + 3B = (2CX^\top + E_n)^\top$$

Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass die erforderlichen inversen Matrizen existieren.

Aufgabe 6 Betrachten Sie nachstehende fünf Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_5 \in \mathbb{R}^5$ mit $a \in \mathbb{R}$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -25 \\ 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ für alle Werte von $a \in \mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

b) Es sei nun $a = 5$. Finden Sie $\vec{x} \in \mathbb{R}^5$, sodass $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1, -2, 1, 1, 1 \end{pmatrix}^\top$ durch $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_5$ linear kombiniert werden kann, d.h. finden Sie Koeffizienten x_i, sodass $\vec{b} = x_1\vec{v}_1 + \ldots + x_5\vec{v}_5$ gilt.

Aufgabe 7 Betrachten Sie nachstehende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 5 & -10 & 25 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte aller vier Matrizen. Wie lauten die zu jedem Eigenwert gehörenden Eigenvektoren?
Hinweis: Bei manchen Matrizen treten komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren auf.

b) Weisen Sie zunächst nach, dass $\det(A) = 8$, $\det(B) = 34$, $\det(C) = 0$ und $\det(D) = -12$ gilt. Berechnen Sie danach separat für jede Matrix das *Produkt ihrer Eigenwerte*. Was fällt Ihnen auf?

c) Unter der **Spur** (engl. 'trace') einer quadratischen Matrix versteht man die Summe ihrer Diagonalelemente, d.h. für $M \in M(n,n)$ ist $\mathrm{tr}(M) := \sum_{k=1}^{n} M_{kk}$.
Weisen Sie zunächst $\mathrm{tr}(A) = 7$, $\mathrm{tr}(B) = 10$, $\mathrm{tr}(C) = 30$ und $\mathrm{tr}(D) = 6$ nach. Berechnen Sie danach separat für jede Matrix die *Summe ihrer Eigenwerte*. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 8 Betrachten Sie $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^\top$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}^\top$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^\top$.

a) Das Standardkoordinatensystem des $\mathbb{R}^2$ wird um $\alpha = 60°$ in mathematisch positive Richtung gedreht. Geben Sie die entsprechende Drehmatrix $A \in M(2,2)$ an und bestimmen Sie damit die neuen Koordinaten von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{x}$ und $\vec{y}$.

b) Das Standardkoordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ wird um $\alpha = 30°$ um die x-Achse gedreht. Geben Sie die entsprechende Drehmatrix $A \in M(3,3)$ an und bestimmen Sie die neuen Koordinaten von $\vec{z}$. Welcher Punkt $\vec{z}_0 \in \mathbb{R}^3$ im alten Koordinatensystem erhält bei der Drehung die ursprüngliche Positionen von $\vec{z}$?

c) Die Punkte $\vec{x}$, $\vec{y}$ werden an der Geraden $\mathrm{span}(\vec{v})$ gespiegelt. Geben Sie die entsprechende Spiegelungsmatrix $S_\alpha \in M(2,2)$ sowie die neuen Koordinaten von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{x}$ und $\vec{y}$ an.

d) Betrachten Sie eine allgemeine Spiegelungsmatrix $S_\alpha \in M(2,2)$. Bestimmen Sie die Determinante, die Spur, die Eigenwerte sowie die Eigenvektoren von S_α.