Übungsblatt 5 - Lösungshinweise

Aufgabe 1 Gegeben sind die nachstehenden Matrizen A, B, C und der Vektor $\vec{v}$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) i) $2A - C$ ist nicht definiert, da A und C unterschiedlich viele Zeilen haben

ii) $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}$

iii) $C \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 18 & 14 \end{pmatrix}$

iv) $B \cdot A$ ist nicht definiert, da B zwei Spalten, A jedoch drei Zeilen hat

v) $A^2 = A \cdot A$ ist nicht definiert, da A nicht quadratisch ist

vi) $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$

vii) $A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 21 & 18 \\ 7 & 19 \end{pmatrix}$

viii) $A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$ wie in der Aufgabe zuvor (Distributivgesetz)

ix) $(B \cdot C) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 44 \end{pmatrix}$

x) $B \cdot (C \cdot \vec{v}) = (B \cdot C) \cdot \vec{v}$ wie in der Aufgabe zuvor (Assoziativgesetz)

xi) $\vec{v}^\top \cdot A$ ist nicht definiert, da $\vec{v}^\top$ zwei Spalten, A jedoch drei Zeilen hat

xii) $\vec{v}^\top \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) i) $f_B + 2f_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \vec{x} \mapsto \vec{w} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 \\ 9x_1 + 11x_2 \end{pmatrix}$, denn $B + 2C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$

ii) $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \vec{x} \mapsto \vec{w} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 16x_1 + 8x_2 \\ x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$, denn $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 16 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

iii) $f_B^{-1} = f_{B^{-1}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \vec{x} \mapsto \vec{w} = f(\vec{x}) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, denn $B^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 Es gilt: $A \cdot B_k = \begin{pmatrix} 7k - 20 & -24 \\ 5k - 45 & -11 \end{pmatrix}$ und $B_k \cdot A = \begin{pmatrix} 7k - 20 & 4k - 36 \\ -30 & -11 \end{pmatrix}$.

Die Diagonalelemente stimmen für alle k überein, aus den beiden Nebendiagonalelementen ergibt sich in beiden Fällen die Bedingung $k = 3$.

Aufgabe 3 Gegeben sind $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

a) i) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, d.h. A ist nilpotent zum Grad 3.

Anmerkung: $A \in M(n,n)$ ist ***nilpotent zum Grad k****, wenn $A^k = 0$ und $A^{k-1} \neq 0$ gilt.*

ii) $(E_3 - A)(E_3 + A + A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \quad \checkmark$

b) i) $B^2 = 0$, d.h. B ist nilpotent zum Grad 2.

ii) $\det(B) = -180 - 180 - 180 + 180 + 180 + 180 = 0 \quad \checkmark$

iii) Es bezeichne $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ die Spalten der Matrix B. Es gilt: $\vec{v}_2 = -\frac{3}{5}\vec{v}_1$ und $\vec{v}_3 = \frac{2}{5}\vec{v}_1$. Damit sind die zweite und dritte Spalte jeweils von der ersten Spalte linear abhängig, d.h. es kann maximal eine linear unabhängige Spalte gefunden werden, also $\mathrm{Rg}(B) = 1 \quad \checkmark$

Aufgabe 4 Für $k, t, x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5+2k & 6+3k \end{vmatrix} = k - 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & t & z \\ 0 & 0 & t^2 \end{vmatrix} = t^3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -0 + 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}}_{=40} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 7 \end{vmatrix}}_{=58} + 0 = 4 \text{ (Entwicklung nach der 4. Zeile)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=-16} + 4 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=-8} - 6 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$+ 0 - 4 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}_{=0} = 0 \quad \text{(Entwicklung der } 5 \times 5\text{-Matrix nach der 2. Spalte)}$$

Aufgabe 5 Für $k, \alpha \in \mathbb{R}$ sind $\det A = \det C_k = \det D_\alpha = 1$, $\det B_k = k - 20$, also

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_k = \begin{pmatrix} k & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow B_k^{-1} = \frac{1}{k-20} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix} \quad \text{für } k \neq 20$$

$$C_k = \begin{pmatrix} 1+k & k \\ -k & 1-k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow C_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1-k & -k \\ k & 1+k \end{pmatrix} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R}$$

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow D_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = D_{-\alpha} \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 6 Gegeben ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto \vec{w} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_3 \\ 5x_1 + x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$.

a) Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Ansatz: $f(\lambda\vec{x} + \vec{y}) \overset{?}{=} \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. Auswerten der linken Seite führt zu:

$$f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -(\lambda x_1 + y_1) + 2(\lambda x_3 + y_3) \\ 5(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) \\ 3(\lambda x_3 + y_3) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_3 \\ 5x_1 + x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_1 + 2y_3 \\ 5y_1 + y_2 \\ 3y_3 \end{pmatrix}$$
$$= \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \quad \checkmark$$

Die Darstellungsmatrix ist $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) Gegeben ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^\top$. Damit:

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw.} \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c) Es ist $\det(A) = -3 \neq 0$, also ist A invertierbar, d.h. es gibt eine Umkehrfunktion f^{-1}.

d) Es ist $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 15 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die inverse Matrix von A, denn

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 15 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \quad \checkmark$$

Bemerkung: Alternativ zu $A \cdot A^{-1}$ kann man auch $A^{-1} \cdot A = E_3$ nachweisen.

Aufgabe 7 Gegeben ist $\vec{b} \in \mathbb{N}_0^5$ sowie die Gewichte g_i und Preise p_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

a) 64 Schrauben der Sorte 2 und 20 Schrauben der Sorte 5, also $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & 65 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}^\top$.

$$\begin{aligned} \text{Gesamtgewicht:} \quad & g = 65g_2 + 20g_5 = 1250 \\ \text{Gesamtpreis:} \quad & p = 65p_2 + 20p_5 = 19,75 \\ \text{Gesamtzahl:} \quad & n = 65 + 20 = 85 \end{aligned}$$

Das Etikett ergibt sich dadurch als $f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1250 \\ 19,75 \\ 85 \end{pmatrix}$

b) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, d.h. $n = 5$, $m = 3$. Die Darstellungsmatrix der lineare Abbildung ist

$$A = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 & 18 & 30 \\ 0,05 & 0,15 & 0,25 & 0,4 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit einer Bestellung $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_0^5 \subseteq \mathbb{R}^5$ ergibt sich das Etikett $\begin{pmatrix} g \\ p \\ n \end{pmatrix} = f(\vec{b}) = A \cdot \vec{b}$

Aufgabe 8 Es ist $A_k^\top \cdot A_k = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2k & 0 & k \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ k & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Damit ist A_k eine orthogonale Matrix für $k \in \{-1, +1\}$.

Aufgabe 9 Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt: $\det(A) = \det(B) = 0$ und $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Daraus ist ersichtlich, dass $\det(A + B) = 1 \neq \det(A) + \det(B) = 0$.