Übungsblatt 5

Aufgabe 1 Gegeben seien die nachstehenden Matrizen A, B, C und der Vektor $\vec{v}$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Welche der folgenden Ausdrücke sind mathematisch sinnvoll? Was ist deren Ergebnis?

i) $2A - C$
ii) $B \cdot C$
iii) $C \cdot B$
iv) $B \cdot A$
v) $A^2 = A \cdot A$
vi) $B^2 = B \cdot B$
vii) $A \cdot (B + C)$
viii) $A \cdot B + A \cdot C$
ix) $(B \cdot C) \cdot \vec{v}$
x) $B \cdot (C \cdot \vec{v})$
xi) $\vec{v}^\top \cdot A$
xii) $\vec{v}^\top \cdot B$

b) Geben Sie die Abbildungsvorschriften der nachstehenden Abbildungen an, wobei $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = M\vec{x}$, die lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix M ist:

i) $f_B + 2f_C$
ii) $f_A \circ f_B$
iii) f_B^{-1} bzw. $f_{B^{-1}}$

Aufgabe 2 Es seien $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Für welche $k \in \mathbb{R}$ gilt $A \cdot B_k = B_k \cdot A$?

Aufgabe 3 Eine Matrix $A \in M(n, n)$ heißt **nilpotent**, falls $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Weisen Sie für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ die nachstehenden Behauptungen nach:

a) i) A ist nilpotent.
Hinweis: Betrachten Sie $A^2, A^3, A^4, \ldots$ bis Sie auf die dreidimensionale Nullmatrix stoßen.

ii) $(E_3 - A)(E_3 + A + A^2) = E_3$, wobei E_3 die dreidimensionale Einheitsmatrix darstellt.

b) i) B ist nilpotent.
Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass eine Matrix M nilpotent sein kann, ohne dass auch nur ein einziges Matrixelement $M_{ij} = 0$ gelten muss.

ii) Die Determinante von B verschwindet: $\det(B) = 0$.

iii) Der Rang von B ist $\mathrm{Rg}(B) = 1$.

Aufgabe 4 Berechnen Sie für $k, t, x, y, z \in \mathbb{R}$ die folgenden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5+2k & 6+3k \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & t & z \\ 0 & 0 & t^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 5 Bestimmen Sie für $k, \alpha \in \mathbb{R}$ die inversen Matrizen von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} k & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} 1+k & k \\ -k & 1-k \end{pmatrix}, \quad D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 Betrachten Sie die folgende Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto \vec{w} = f(\vec{x})$ mit den Komponenten $w_1 = -x_1 + 2x_3$, $w_2 = 5x_1 + x_2$ und $w_3 = 3x_3$.

a) Zeigen Sie zunächst, dass f eine lineare Abbildung darstellt. Wie lautet die Darstellungsmatrix A von f?

b) Nutzen Sie i) die Funktionsdarstellung f sowie ii) die Matrixdarstellung A, um das Ergebnis von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^\top$ unter der Abbildung zu berechnen.

c) Zeigen Sie mithilfe der Determinante, dass f eine Umkehrfunktion besitzt.

d) Weisen Sie nach, dass die Umkehrfunktion f^{-1} folgende Darstellungsmatrix besitzt:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 15 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 Ein Versandhändler für Schrauben hat fünf verschiedene Schraubensorten im Angebot. Diese unterscheiden sich nur durch ihr *Gewicht* g_i und ihren *Stückpreis* p_i. Zu jeder Bestellung soll ein Etikett auf dem Versandkarton die drei wichtigsten Informationen für den Kunden zusammenfassen: *Gesamtgewicht*, *Gesamtpreis* und *Gesamtstückzahl*.
Eine Bestellung wird dabei durch einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{N}_0^5$ dargestellt, dessen Komponente b_i angibt, wie viele Schrauben der Sorte i bestellt worden sind. Gehen Sie im Folgenden von Gewichten (in Gramm) $g_1 = 8, g_2 = 10, g_3 = 14, g_4 = 18, g_5 = 30$ und Preisen (in Euro) $p_1 = 0,05, p_2 = 0,15, p_3 = 0,25, p_4 = 0,4, p_5 = 0,5$ aus.

a) Eine erste Bestellung lautet über 65 Schrauben der Sorte 2 sowie 20 Schrauben der Sorte 5. Wie lautet die Bestellung $\vec{b}$ und die Aufschrift auf dem Etikett?

b) Modellieren Sie eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die ausgehend von einer beliebigen Bestellung $\vec{b}$ die Informationen für das Etiketts zusammenstellt. Wie sind $n, m \in \mathbb{N}$ zu wählen? Geben Sie die Darstellungsmatrix $A \in M(m, n)$ von f an.

Aufgabe 8 Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist $A_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2k & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ k & 0 & -2 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix?

Aufgabe 9 Bei der Berechnung der Determinante einer Summe darf diese *nicht* auseinandergezogen werden: $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$. Diese Ungleichung bedeutet, dass die Determinante *keine* lineare Abbildung ist.
Überzeugen Sie sich selbst durch ein Gegenbeispiel mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.