Übungsblatt 4 - Lösungshinweise

Aufgabe 1

a) $\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

b) $\vec{v}-2\vec{w}+\vec{u}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$

c) $2\alpha\cdot\vec{v}+7\alpha\cdot\vec{w}+4\alpha\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$

d) $2\alpha\cdot\vec{v}+5\beta\cdot\vec{w}+\alpha\cdot\vec{u}=5\begin{pmatrix}\alpha-\beta\\\beta\end{pmatrix}$

Aufgabe 2

a) Aus den Punkten ergeben sich Ortsvektoren $\vec{v}_A=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_C=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

i) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

ii) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5},\quad |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{13},\quad |\overrightarrow{CA}|=\sqrt{10}$

iii) $D(1|-2),\quad \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix},\quad |\overrightarrow{AD}|=\sqrt{17}$. Ferner gilt: $F=7$

b) Für $\lambda>2$ gilt $\vec{v}(\lambda)\in Q_4$.

Aufgabe 3

a) falsch, da ein einzelner Vektor niemals eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden kann.

b) falsch, da die beiden Vektoren linear abhängig sind: $\vec{v}_1=2\vec{v}_2$.

c) richtig, da $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig sind und es zwei Vektoren sind (Satz 3.7).

d) falsch, da drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ stets linear abhängig sind, können sie keine Basis bilden

e) falsch, da $\vec{v}=\lambda\vec{w}$ für ein $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt, folgt: $\operatorname{span}(\vec{v},\vec{w})=\operatorname{span}(\vec{w})\neq\mathbb{R}^2$
Bemerkung: Es gilt i.A. $\operatorname{span}(\vec{v})\neq\operatorname{span}(\vec{w})$, da laut Angabe $\vec{v}=\vec{0}$ gelten könnte ($\lambda\in\mathbb{R}$).

f) richtig, denn laut Definition 3.4 einer Basis ist die Eigenschaft $\operatorname{span}(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)=\mathbb{R}^n$ gefordert.

g) falsch, denn die lineare Abhängigkeit von $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ kann durch Hinzunahme eines (oder mehrerer) weiterer Vektoren nicht „korrigiert“ werden; die Vektoren bleiben linear abhängig.

h) richtig, wähle einen beliebigen Vektor $\vec{0}\neq\vec{v}_3\notin\operatorname{span}(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$, so sind $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ drei linear unabhängige Vektoren mit $\operatorname{span}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\mathbb{R}^3$ und damit ist $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 Für die nachstehenden Vektoren $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{w}_i \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

a) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -1$

b) $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 7$

c) $\vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1$ nicht möglich, da $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{w}_1 \in \mathbb{R}^3$ aus unterschiedlich-dimensionalen Vektorräumen stammen.

d) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ nicht möglich, da das Kreuzprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nur für zwei Vektoren aus dem dreidimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ definiert ist.

e) $\vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix}$

f) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$ nicht sinnvoll, da das Skalarprodukt nicht assoziativ ist und daher zwei unterschiedliche Klammerungen gelesen werden können, $(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 \neq \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3)$:

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3) = \begin{pmatrix}7\\14\end{pmatrix}$$

g) $\vec{w}_1 \times \vec{w}_2 \times \vec{w}_3$ nicht sinnvoll, da das Kreuzprodukt nicht assoziativ ist und daher zwei unterschiedliche Klammerungen gelesen werden können, $(\vec{w}_1 \times \vec{w}_2) \times \vec{w}_3 \neq \vec{w}_1 \times (\vec{w}_2 \times \vec{w}_3)$:

$$(\vec{w}_1 \times \vec{w}_2) \times \vec{w}_3 = \begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 \times (\vec{w}_2 \times \vec{w}_3) = \begin{pmatrix}-1\\13\\2\end{pmatrix}$$

h) $\vec{v}_1 \cdot (\vec{w}_2 \times \vec{w}_3)$ nicht möglich, da $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$, aber $\vec{w}_2 \times \vec{w}_3 \in \mathbb{R}^3$.

i) $\vec{w}_1 \times (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$ nicht möglich, da $\vec{w}_1 \in \mathbb{R}^3$, aber $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 Für $k = -\dfrac{5}{2}$ gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}(k)$.

Aufgabe 6 Aus den Vektoren $\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \mu \begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, unbestimmter Länge folgt: $\varphi = \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \approx 69,3^\circ$

Aufgabe 7

a) Möglich ist u.a. $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Die drei Vektoren stehen aufeinander senkrecht, denn es gilt nach Konstruktion $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_1$ und $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_2$. Ebenso $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ aufgrund von $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$. Ferner gilt: $|\vec{v}_1| = \sqrt{2}$, $|\vec{v}_2| = 3$ und $|\vec{v}_3| = 3\sqrt{2}$, damit ist eine Orthonormalbasis gegeben durch:

$$B_{\text{ONB}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_1,\ \frac{1}{3}\vec{v}_2,\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{v}_3 \right\}$$

Aufgabe 8 Es gilt $|\vec{w}(t) - \vec{v}(t)| = \sqrt{A^2 + B^2}$ (unabhängig von t). Für $A = 1$ und $B = 2$ beschreibt $\vec{v}(t)$ eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Einheitskreis, $\vec{w}(t)$ hingegen auf einem Kreis mit Radius $B = 2$ und einem verschobenen anfänglichen Winkel: $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. In diesem Fall gilt für alle Zeiten $t \geq 0$: $|\vec{w}(t) - \vec{v}(t)| = \sqrt{5}$.