Übungsblatt 4

Aufgabe 1 Berechnen Sie für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ die folgenden Vektoren:

a) $\vec{v} + \vec{w}$

b) $\vec{v} - 2\vec{w} + \vec{u}$

c) $2\alpha \cdot \vec{v} + 7\alpha \cdot \vec{w} + 4\alpha \cdot \vec{u}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

d) $2\alpha \cdot \vec{v} + 5\beta \cdot \vec{w} + \alpha \cdot \vec{u}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2 Der vierte Quadrant Q_4 ist definiert als:

$$Q_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; x > 0 \;,\; y < 0 \right\}$$

a) Betrachten Sie das Dreieck ABC mit den Ecken $A(0|2)$, $B(2|1)$ und $C(-1|-1)$.

i) Wie lauten die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CA}$ der drei Seiten?

ii) Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

iii) Bestimmen Sie die Koordinaten des (eindeutig bestimmten) Punktes $D \in Q_4$, der das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm erweitert. Berechnen Sie den Abstand der Ecken A und D sowie den Flächeninhalt F des Parallelogramms.

b) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\vec{v}(\lambda) \in Q_4$ gilt für den parameterabhängigen Vektor

$$\vec{v}(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Welche der nachstehenden Aussagen ist korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ bildet eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

b) Die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

c) Die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

d) Die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

e) Wenn für $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ gilt, dass $\vec{v} = \lambda \vec{w}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt $\operatorname{span}(\vec{v}, \vec{w}) = \mathbb{R}^2$.

f) Ist $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so gilt $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \mathbb{R}^n$.

g) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig, so ist es möglich, einen dritten Vektor $\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ zu finden, sodass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig werden.

h) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, so ist es möglich, einen dritten Vektor $\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ zu finden, sodass $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 4 Untersuchen Sie, welche nachstehenden Ausdrücke für

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mathematisch sinnvoll sind. Aus welchen Gründen können die unsinnigen Ausdrücke nicht berechnet werden? Was ist das Ergebnis der sinnvollen Ausdrücke?

a) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$

b) $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2$

c) $\vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1$

d) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

e) $\vec{w}_1 \times \vec{w}_2$

f) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$

g) $\vec{w}_1 \times \vec{w}_2 \times \vec{w}_3$

h) $\vec{v}_1 \cdot (\vec{w}_2 \times \vec{w}_3)$

i) $\vec{w}_1 \times (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$

j) $\vec{v}_1 \cdot (\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2) + \vec{v}_3 \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1)$

Aufgabe 5 Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}(k) = \begin{pmatrix} k \\ 3+k \\ 1 \end{pmatrix}$ für $k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Parameter k, sodass $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}(k)$ gilt.
Notation: Die Schreibweise $\vec{v} \perp \vec{w}$ zeigt an, dass $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 6
Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ liegt in der x-z-Ebene und bildet mit der positiven x-Achse einen Winkel von $45°$. Ein weiterer Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ liegt in der y-z-Ebene und bildet mit der positiven y-Achse einen Winkel von $30°$. Wie groß ist der Winkel φ, den $\vec{v}$ und $\vec{w}$ einschließen?

Aufgabe 7 Betrachten Sie die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Ergänzen Sie die Menge $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ durch Hinzunahme eines Vektors $\vec{v}_3$ zu einer Basis $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$.

b) Zeigen Sie, dass B keine Orthonormalbasis ist. Geben Sie darauf aufbauend eine Orthonormalbasis B_{ONB} des $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 8 Betrachten Sie $\vec{v}(t) = A \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ und $\vec{w}(t) = B \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für nicht-negative Zeiten $t \geq 0$ und Amplituden $B > A > 0$. Zeigen Sie, dass die Länge des Differenzvektors $\vec{w}(t) - \vec{v}(t)$ zeitlich konstant ist und skizzieren Sie für $A = 1$ und $B = 2$ die durch $\vec{v}(t)$ und $\vec{w}(t)$ beschriebene Dynamik.