Übungsblatt 3 - Lösungshinweise

Aufgabe 1

a)
- $z + w = 4 + 2i$
- $z - w = 2 + 6i$
- $\overline{z} = 3 - 4i$
- $\overline{w} = 1 + 2i$
- $z \cdot w = 11 - 2i$
- $\frac{z}{w} = -1 + 2i$
- $v^3 = -i$
- $(-v)^6 = -1$
- $v^n = \begin{cases} i & \text{falls } (n+3) \text{ durch 4 teilbar ist, } n \in \{\dots, -3, 1, 5, 9, \dots\} \\ -1 & \text{falls } (n+2) \text{ durch 4 teilbar ist, } n \in \{\dots, -2, 2, 6, 10, \dots\} \\ -i & \text{falls } (n+1) \text{ durch 4 teilbar ist, } n \in \{\dots, -1, 3, 7, 11, \dots\} \\ 1 & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist, } n \in \{\dots, -4, 0, 4, 8, \dots\} \end{cases}$

b) Es gilt für $a \in \mathbb{R}$:

$$z = \frac{(3-2i)(2+ai)}{(a+5i) \cdot i^7} = \underbrace{\frac{-3a^2 + 14a + 30}{a^2 + 25}}_{=\mathrm{Re}(z)} + i \cdot \underbrace{\frac{2a^2 + 21a - 20}{a^2 + 25}}_{=\mathrm{Im}(z)} = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z)$$

Aufgabe 2

- $z = \frac{1}{2\sqrt{5}}(3 + i)$
- $\overline{z} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(3 - i)$
- $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $z^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(3 - i)$

Aufgabe 3

a) $z = -\frac{27}{5} - \frac{24}{5}i$

b) $z_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -z_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

c) Die Lösungen liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt $z_0 = 1 + i$ und Radius $r = \sqrt{2}$: $z \in \{(1+i) + \sqrt{2} \cdot e^{i\varphi} \,|\, \varphi \in [0, 2\pi)\}$.

d) Die Lösungen liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt $z_0 = 1 - i$ und Radius $r = 1$: $z \in \{(1-i) + e^{i\varphi} \,|\, \varphi \in [0, 2\pi)\}$.

Aufgabe 4

Kartesische Form $z = x + iy$ und Polarform $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$:

a) $z = -\frac{1}{5} - i\frac{\sqrt{3}}{5}$; bzw. $|z| = \frac{2}{5}$, $\varphi = \frac{4}{3}\pi$ ($\hat{=}\, 240°$)

b) $z = 10i$; bzw. $|z| = 10$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($\hat{=}\, 90°$)

c) $z = -\frac{5}{3}$; bzw. $|z| = \frac{5}{3}$, $\varphi = \pi$ ($\hat{=}\, 180°$)

d) $z = i$; bzw. $|z| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($\hat{=}\, 90°$)

Aufgabe 5

a) In kartesischer Darstellung gilt $z = x + iy = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z)$:

- $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$
- $z = 1$
- $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$

b) In Exponentialform gilt: $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$:

- $z = -i$; $|z| = 1$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ($\hat{=}\, 270°$)
- $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$; $|z| = 1$, $\varphi = \frac{11\pi}{6}$ ($\hat{=}\, 330°$)
- $z = -3\left(2 + \sqrt{3}\right) + 3i$; $|z| = 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $\varphi = \frac{11\pi}{12}$ ($\hat{=}\, 165°$)

Aufgabe 6

$$\text{i) } z = (1-i)^{42} = -2.097.152i \qquad \text{ii) } z = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{24}}{(1+i)^{42}} = -8i$$

$$\text{iii) } z = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ durch 3 teilbar ist, } n \in \{0, 3, 6, \ldots\} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & \text{falls } (n-1) \text{ durch 3 teilbar ist, } n \in \{1, 4, 7, \ldots\} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & \text{falls } (n+1) \text{ durch 3 teilbar ist, } n \in \{2, 5, 8, \ldots\} \end{cases}$$

Aufgabe 7 $A = 2$ und $\varphi = \varphi_k \in \{\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \,|\, \text{mit } k \in \mathbb{Z}\}$

Aufgabe 8 Formel von Moivre lautet für $n = 3$: $(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^3 = \cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)$. Durch Ausmultiplizieren und Umordnung der linken Seite erhält man

$$\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) + i\left(3\sin(\varphi)\cos^2(\varphi) - \sin^3(\varphi)\right) = \cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)$$

Aus dem Vergleich des Real- und Imaginärteils erhält man die behaupteten Identitäten.

Aufgabe 9

a) $p(z) = z^3 - 8i = \prod_{k=1}^{3}(z - z_k)$ mit $z_1 = -2i$, $z_2 = i + \sqrt{3}$, $z_3 = i - \sqrt{3}$

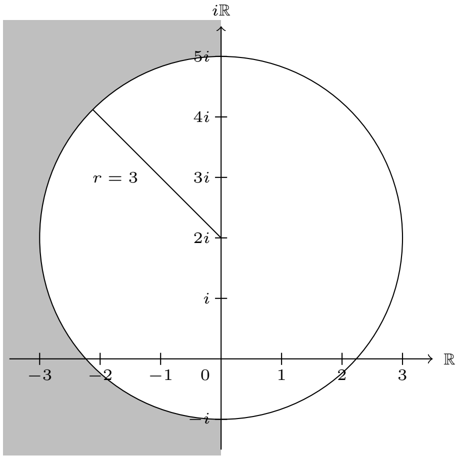
b) $p(z) = z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = \prod_{k=1}^{3}(z - z_k)$ mit $z_1 = -1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $p(z) = z^4 + z^2 + 1 = \prod_{k=1}^{4}(z - z_k)$ mit $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $z_4 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

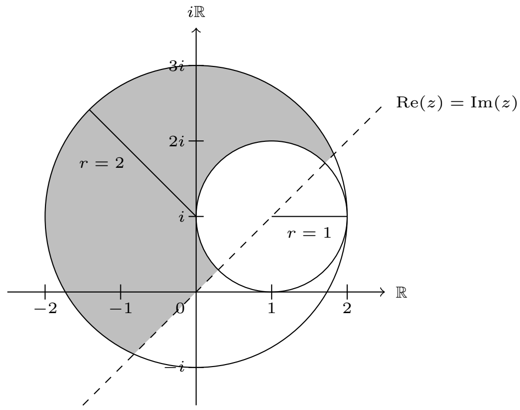
d) $p(z) = z^6 + 1 = \prod_{k=1}^{6}(z - z_k)$ mit $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{6}} = i$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$,
$z_4 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $z_5 = e^{i\frac{9\pi}{6}} = -i$, $z_6 = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

Aufgabe 10

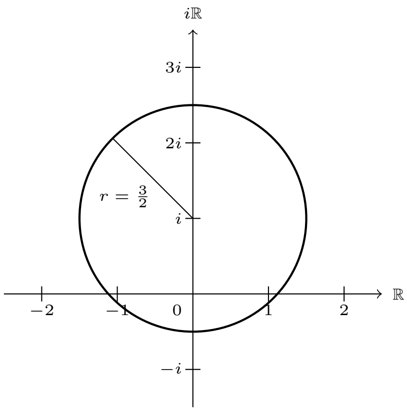
a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| \geq 3,\ \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$



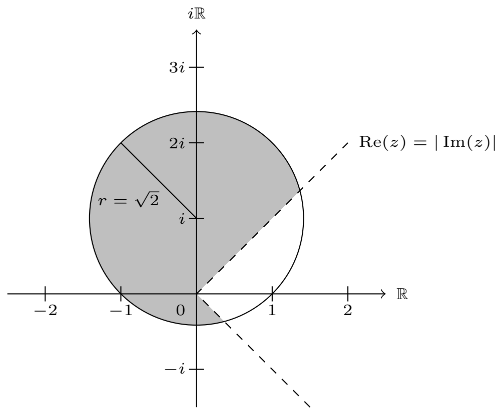
b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 2,$
$|z - 1 - i| > 1,\ \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z)\}$



c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |(1+i)z + 1 - i| = \frac{3}{\sqrt{2}}\}$
$= \{i + \frac{3}{2} \cdot e^{i\varphi} \,|\, \varphi \in [0, 2\pi)\}$



d) $D = \{z \in \mathbb{C} : |(1+i)z + 1 - i| \leq 2,$
$\mathrm{Re}(z) \leq |\,\mathrm{Im}(z)|\}$



Aufgabe 11

a) Es gilt für $\varphi \in \mathbb{R}$: $\cos(i\varphi) = \cosh(\varphi)$ und $\sin(i\varphi) = i \cdot \sinh(\varphi)$

b) Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

c) Es gilt für $\varphi \in \mathbb{R}$: $\cos^2(i\varphi) + \sin^2(i\varphi) = (\cosh(\varphi))^2 + (i\sinh(\varphi))^2 = \cosh^2(\varphi) - \sinh^2(\varphi) = 1$