# Übungsblatt 3

**Aufgabe 1**

a) Geben Sie für $z = 3 + 4i$, $w = 1 - 2i$, $v = i$ die folgenden Werte in kartesischer Form an und skizzieren Sie alle Zahlen und Ergebnisse in der komplexen Ebene:

$$z + w, \quad z - w, \quad \overline{z}, \quad \overline{w}, \quad z \cdot w, \quad \frac{z}{w}, \quad v^3, \quad v^{-5}, \quad (-v)^6, \quad v^n \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

b) Berechnen Sie für allgemeine $a \in \mathbb{R}$ den Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = \frac{(3-2i)(2+ai)}{(a+5i) \cdot i^7}$$

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie $\overline{z}$, $|z|$ und $z^{-1}$ für $z = \frac{\sqrt{5}}{10}(1+i)(2-i)$.

**Aufgabe 3** Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der nachstehenden Gleichungen und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Ebene:

a) $\frac{z}{i-1} - \frac{3i-6}{3i+1} = \frac{6i-3}{2+i}$

b) $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$

c) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$.

d) $|iz - i - 1| = 1$

**Aufgabe 4** Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in kartesischer Form und Polarform dar:

a) $z = \frac{\sqrt{3} - i}{3i + \operatorname{conj}\left((1-i)^2\right)}$

b) $z = \prod_{k=1}^{3} (k + i)$

c) $z = \prod_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{k} + i\right)$

d) $z = \sum_{k=0}^{42} i^k$

**Aufgabe 5**

a) Geben Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen an:

$$\text{i) } \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{ii) } \left(\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)\right)^{12} \qquad \text{iii) } \sqrt{3}\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$$

b) Geben Sie die Exponentialform für die folgenden komplexen Zahlen an:

$$\text{i) } i^3 \qquad \text{ii) } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \qquad \text{iii) } -\left(6 + 3\sqrt{3}\right) + 3i$$

**Aufgabe 6** Wie lauten folgende komplexe Zahlen in kartesischer Form?

$$\text{i) } (1-i)^{42} \qquad \text{ii) } \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{24}}{(1+i)^{42}} \qquad \text{iii) } \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{n} \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0$$

**Aufgabe 7** Geben Sie alle $A > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ an, sodass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$(\sqrt{3}-i) \cdot e^{i\varphi} = A \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$

**Aufgabe 8** Zeigen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre, dass für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)$$
$$\sin(3\varphi) = 3\sin(\varphi)\cos^2(\varphi) - \sin^3(\varphi)$$

**Aufgabe 9** Geben Sie alle komplexen Nullstellen der folgenden Polynome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an:

a) $p(z) = z^3 - 8i$

b) $p(z) = z^3 + 2z^2 + 2z + 1$

c) $p(z) = z^4 + z^2 + 1$

d) $p(z) = z^6 + 1$

**Aufgabe 10** Skizzieren Sie nachstehende Teilmengen der komplexen Ebene:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| \geq 3,\ \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 2,\ |z - 1 - i| > 1,\ \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |(1+i)z + 1 - i| = \frac{3}{\sqrt{2}}\}$

d) $D = \{z \in \mathbb{C} : |(1+i)z + 1 - i| \leq 2,\ \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)|\}$

**Aufgabe 11** Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die trigonometrischen Funktionen $\cos(\cdot)$ und $\sin(\cdot)$ bei komplexen Argumenten in die Hyperbelfunktionen $\cosh(\cdot)$ und $\sinh(\cdot)$ übergehen bzw. durch diese darstellbar sind.

a) Betrachten Sie zunächst $\varphi \in \mathbb{R}$ und die Identitäten $\cos(\varphi) = \operatorname{Re}(e^{i\varphi})$ sowie $\sin(\varphi) = \operatorname{Im}(e^{i\varphi})$. Zeigen Sie, dass $\cos(i\varphi)$ und $\sin(i\varphi)$ durch die hyperbolischen Funktionen $\cosh(\varphi)$ und $\sinh(\varphi)$ dargestellt werden können.

b) Nutzen Sie die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus, um allgemeine Ausdrücke für $\sin(z)$ und $\cos(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ zu finden. Nutzen Sie dabei Teilaufgabe a) und die Hyperbelfunktionen.

c) Ist für $\varphi \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\cos^2(i\varphi) + \sin^2(i\varphi) = 1$ korrekt?