Übungsblatt 2 - Lösungshinweise

Aufgabe 1

a) i) $\sum_{i=0}^{4}(-1)^{i+1}(i+1)^2 = -15$

ii) $\sum_{k=1}^{7}\sin(\frac{k\pi}{2}) = 0$

iii) $\sum_{x=3}^{10} 5x = 260$

b) i) $\sum_{k=0}^{9}(1+4k) = 190$

ii) $\sum_{k=0}^{7}(-1)^k\frac{1}{3^k} = \frac{1640}{2187}$

c) i) $\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$; für den Spezialfall $n = 10$: $\sum_{k=1}^{10} 2k = 110$

ii) $\sum_{k=0}^{n}\exp(k) = \frac{1-e^{n+1}}{1-e}$; für den Spezialfall $n = 10$: $\sum_{k=0}^{10}\exp(k) = \frac{1-e^{11}}{1-e} \approx 34.844,774$

iii) $\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\pi) = n+1$; für den Spezialfall $n = 10$: $\sum_{k=0}^{10}\cos^2(k\pi) = 11$

d) i) $\sum_{k=17}^{n+16} 2(k-16) = \sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

ii) $\sum_{k=17}^{n+17} 2(k-17) = \sum_{k=0}^{n} 2k = 0 + \sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1) = n(n+1)$

iii) $\sum_{k=1}^{n}\sin^2((k+\frac{1}{2})\cdot\pi) = \sum_{k=1}^{n}\cos^2(k\pi) = n$

Aufgabe 2 $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0 \; (*)$

a) Durch $(*)$ ist *keine Funktion* implizit definiert, da für manche $x \in \mathbb{R}$ zwei y-Werte (positives sowie negatives Vorzeichen) die Gleichung erfüllen.
Für $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 - \frac{x^2}{16} \geq 0\} = [-4,4]$ und $Z = \mathbb{R}$ ist durch $f : D \to Z$ mit $x \mapsto y = f(x) = 3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$ eine Funktion definiert, die $(*)$ erfüllt.

b) Direktes Einsetzen der Parametrisierung $x(t) = 4\cos(t)$ und $y(t) = 3\sin(t)$ in $(*)$ zeigen, dass die Gleichung erfüllt ist.
Die Menge der Lösungen (x, y) liegen auf einer Ellipse mit Mittelpunkt $M = (0, 0)$ und den Scheiteln $S_{1,2} = (\pm 4, 0)$ und $S_{3,4} = (0, \pm 3)$.

Aufgabe 3

a) $D = \mathbb{R} \setminus (2,4)$.

b) $D = [0, \frac{\pi+1}{2})$

c) $D = (-2,2)$.

Aufgabe 4

a)
- Wertebereich f: $W = [0,1]$
  Dies kann man zeigen über $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ und der Faktorisierung der Funktion: $f(x) = (1-x) \cdot \frac{1}{1+x}$. Da beide Faktoren streng monoton fallende Funktionen in x sind, ist auch $f(x)$ streng monoton fallend und der Wertebereich ist gegeben durch $W = [f(1), f(0)] = [0,1]$.
- Wertebereich von $2f$: $[0,2]$
- Wertebereich von f^2: $[0,1]$
- $f \circ f : [0,1] \to [0,1]$ mit $x \mapsto (f \circ f)(x) = x$, d.h. $f \circ f = \text{id}$ auf $[0,1]$

b) Da $f : [0,1] \to W = [0,1]$ in den Wertebereich abbildet (Zielbereich ist der gesamte Wertebereich) und streng monoton (fallend) ist, ist f umkehrbar. Aus der Betrachtung von $f \circ f$ folgt, dass f ihr eigenes Inverses (Involution) ist, d.h. $f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ mit $x \mapsto f^{-1}(x) = f(x)$.

c) $g_n : [-n,1] \to [0,1]$ mit $g_n(x) = \dfrac{n+x}{2+n-x}$

Aufgabe 5 $W = (0,\infty)$; Umkehrfunktion $f^{-1} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{5}$

Aufgabe 6 $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = -\frac{1}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{\pi}x = \frac{x}{\pi}\left(2 - \frac{x}{\pi}\right)$.

Aufgabe 7 Wegen ihres Bezugs zur Flächenberechnung der Hyperbel werden die nachstehenden Funktionen auch als Areafunktionen bezeichnet:

- $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
- $\cosh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

Aufgabe 8

a) $\dfrac{6x^2-4x-7}{x^3-3x-2} = \dfrac{5}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x-2}$

b) $\dfrac{-7x+20}{x^3-9x^2+26x-24} = \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{4}{x-4}$

c) $\dfrac{15x^3+76x-90}{x^4-2x^3+9x^2-18x} = \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{x-2} + \dfrac{3x+16}{x^2+9}$

d) $\dfrac{2x^2+7x-3}{x^3-5x^2+8x-4} = \dfrac{-4}{x-2} + \dfrac{19}{(x-2)^2} + \dfrac{6}{x-1}$

e) $\dfrac{4x+16}{x^3-4x} = \dfrac{-4}{x} + \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}$

f) $\dfrac{6x^2-5x-5}{x^3-2x^2-x+2} = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{x-2}$