Übungsblatt 2

Aufgabe 1

a) Schreiben Sie die nachstehenden Summen explizit aus. Was ist deren Ergebnis?

$$\text{i)} \sum_{i=0}^{4} (-1)^{i+1}(i+1)^2 \qquad \text{ii)} \sum_{k=1}^{7} \sin(\tfrac{k\pi}{2}) \qquad \text{iii)} \sum_{x=3}^{10} 5x$$

b) Verwenden Sie für die nachstehenden Summen das Summenzeichen und berechnen Sie:

$$\text{i)}\ 1+5+9+13+\ldots+37 \qquad \text{ii)}\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\pm\ldots-\frac{1}{2187}$$

c) Berechnen Sie die nachstehenden Summen zunächst für allgemeines $n \in \mathbb{N}$. Wie lautet das jeweilige Ergebnis für $n = 10$?

$$\text{i)} \sum_{k=1}^{n} 2k \qquad \text{ii)} \sum_{k=0}^{n} \exp(k) \qquad \text{iii)} \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\pi)$$

d) Berechnen Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ die nachstehenden Summen unter Zuhilfenahme der vorherigen Teilaufgabe.

$$\text{i)} \sum_{k=17}^{n+16} 2(k-16) \qquad \text{ii)} \sum_{k=17}^{n+17} 2(k-17) \qquad \text{iii)} \sum_{k=1}^{n} \sin^2((k+\tfrac{1}{2})\cdot\pi)$$

Aufgabe 2 Betrachten Sie die Gleichung $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ $(*)$.

a) Ist durch die Gleichung $(*)$ implizit eine (reelle) Funktion $f : D \to Z$ definiert? Geben Sie eine explizite Darstellung einer Funktionsvorschrift $y = f(x)$ zusammen mit einer geeigneten Definitions- und Zielmenge an, welche die Gleichung $(*)$ erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass Punkte der Form $(x(t), y(t)) = (4\cos(t), 3\sin(t))$ für $t \in [0, 2\pi)$ die Gleichung $(*)$ erfüllen. Skizzieren Sie die Menge aller Lösungen (x, y) von $(*)$.

Aufgabe 3 Ermitteln Sie die Definitionsbereiche D, sodass $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist.

a) $f : D \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2 - 6x + 9$ und $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $\quad g(x) = \sqrt{x-1}$.

b) $f : D \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{x}{2} - 1$ und $g : [-1, \pi) \to \mathbb{R}$, $\quad g(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{\pi - x}}$

c) $f : D \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ und $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $\quad g(x) = \ln(1 - |x|)$.

Aufgabe 4 Es sei $f : [0,1] \to W, \quad x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$.

a) Bestimmen Sie den Wertebereich W der Funktion f. Bestimmen Sie auch den Wertebereich der Funktionen $2f$ sowie f^2. Wie sieht die Funktion $f \circ f$ aus?

b) Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist und geben Sie die Umkehrfunktion an.

c) Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $g_n : [a,b] \to W$ mit $g_n(x) = f\left(\dfrac{1-x}{n+1}\right)$. Wie groß kann in Abhängigkeit von n der Definitionsbereich höchstens sein, sodass die Funktion g_n wohldefiniert ist. Bestimmen Sie für diesen Fall einen expliziten Ausdruck für $g_n(x)$.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie den Wertebereich W der Funktion $f : \mathbb{R} \to W, \quad x \mapsto 2\exp(5x+3)$ sowie die Umkehrfunktion von f.

Aufgabe 6
Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades, das im Intervall $[0, 2\pi]$ mit der Sinus-Funktion die Nullstellen und den Scheitel (Hochpunkt) gemeinsam hat.

Aufgabe 7 Ermitteln Sie die Umkehrfunktionen von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 8
Führen Sie für folgende gebrochenrationale Funktionen die Partialbruchzerlegung durch:

a) $\dfrac{6x^2-4x-7}{x^3-3x-2}$ c) $\dfrac{15x^3+76x-90}{x^4-2x^3+9x^2-18x}$ e) $\dfrac{4x+16}{x^3-4x}$

b) $\dfrac{-7x+20}{x^3-9x^2+26x-24}$ d) $\dfrac{2x^2+7x-3}{x^3-5x^2+8x-4}$ f) $\dfrac{6x^2-5x-5}{x^3-2x^2-x+2}$