Übungsblatt 1

Aufgabe 1 Skizzieren Sie die nachstehenden Mengen auf dem reellen Zahlenstrahl:

a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 5\}$

b) $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > 3\} \cap \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leq 5\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| < \pi\} \cap \mathbb{Z}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 > 100\} \cap \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| < 100\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x + 5 = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - 1| \leq 2\}$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie für $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 3\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > -4\}$ die Mengen $\overline{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ und zusätzlich die Menge $M = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \in A \cap B\}$.

b) Geben Sie ein Beispiel für Mengen A, B, C an, sodass $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$ gilt, ihr gemeinsamer Schnitt jedoch leer ist: $A \cap B \cap C = \emptyset$.

c) Was kann über $A \cap M$ ausgesagt werden, falls $A \subseteq B$ und $B \cap M = \emptyset$ gilt?

d) Bestimmen Sie in der nachstehenden Gleichung die Menge M:

$$\overline{(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap C)} = A \cup M \, .$$

Wie lässt sich $A \cup M$ mit einem Venn-Diagramm darstellen?

e) Es seien $A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, -3 < x < 2\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 4\}$. Bestimmen Sie das kartesische Produkt $P = A \times B$ und stellen Sie die Menge graphisch dar.
Betrachten Sie zusätzlich die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + x + \frac{1}{2}$ und ihren Graphen $G = \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Veranschaulichen Sie die Menge $G \cap P$ graphisch und geben Sie sämtliche Elemente explizit an.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die nachstehenden Mengen:

a) $L_0 = \{c \in \mathbb{R} \,|\, 3x^2 + 4x = c \text{ hat keine reelle Lösung}\}$

b) $L_1 = \{c \in \mathbb{R} \,|\, 3x^2 + 4x = c \text{ hat genau eine reelle Lösung}\}$

c) $L_2 = \{c \in \mathbb{R} \,|\, 3x^2 + 4x = c \text{ hat zwei verschiedene reelle Lösungen}\}$

d) $L_4 = \{b \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + bx + b = 0 \text{ besitzt mindestens eine reelle Lösung}\}$

e) $L_5 = \{(b, c) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + bx + c = 0 \text{ besitzt genau eine reelle Lösung}\}$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

a) $\sqrt{3x^2 - \frac{3}{4}} = 1 - 2x$

b) $|x^2 - 2x| = 1$

c) $|2x + 4| = -x^2 + x + 6$

d) $|\cos(\frac{x}{42})| = -\frac{1}{1+\pi^2} \cdot x^2 \cdot \exp\left(-\sin(x^2)\right)$

Aufgabe 5 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

a) $4x^{2k-1} \cdot 5x^{3k+4} \cdot 3x^{n-5k-3}$

b) $\sqrt{a^b \cdot a^{b+1} \cdot \left(\frac{a^2-1}{a+1} + a^0\right)}$

c) $20x^2 \cdot \frac{3a}{5x} - \frac{5x}{3} + \frac{(ax)^2 - 25x^2}{3x(a-5)} - \frac{a(x+6)}{3}$

d) $\sqrt{xy \cdot \sqrt[3]{(xy)^2}} \cdot \frac{xy}{\sqrt[6]{(xy)^5}}$

e) $\frac{5!}{(2+n)!} \cdot \frac{n!}{3!}$

f) $\log n! - \sum\limits_{k=1}^{n} \log k$

g) $\frac{1}{2}\left(\log(a \cdot b^2) - \log a\right)$

h) $\frac{\log_\pi 16}{\log_\pi 2} - \frac{\ln 125}{\ln 5}$

i) $\frac{ax}{a + 2\sqrt{a}} + \frac{4x \cdot \sqrt{a}}{2a - 8} - \frac{a(x-1)}{a-4}$

j) $\log\left(\sqrt[4]{\frac{16x^4 \cdot \sqrt[3]{y-1}}{\sqrt[3]{(y-1)^3 \cdot (y^2 - 2y + 1)}}}\right)$

Aufgabe 6
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen in Abhängigkeit der Parameter a, b. Geben Sie auch an, welche Werte beide Parameter annehmen dürfen, damit die angegebenen Ausdrücke definiert sind.

a) $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) + e^{\ln a} = a + \frac{1}{e^x}$

b) $\frac{ax^2 - bx + 1}{a} = \frac{bx^2 - ax + 1}{b}$

c) $\frac{x - \sqrt{a}}{x - \sqrt{b}} - \frac{x - \sqrt{a}}{x + \sqrt{b}} = 0$

d) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

Aufgabe 7 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

a) $x^2 - 4x \geq 5$

b) $|x^2 - 16| \leq 2x - 8$

c) $\frac{3x+7}{x-3} \leq x$

d) $|\exp(x^2) - \pi| \leq \pi$